ワルラス経済学とその周辺

櫻田　陽一

A Note on the Walrasian Economics and the Peripherals

福岡女学院大学紀要
国際キャリア学部編抜刷　Vol. 7, 2021

ワルラス経済学とその周辺

櫻田　陽一

A Note on the Walrasian Economics and the Peripherals

ABSTRACT

The so-called marginal revolution in economics took place in the 1870s. In particular, it has been longly advocated that the three Marginal Revolutionary Musketeers are Marie-Esprit-Léon Walras, William Stanley Jevons and Carl Menger. However, these three are not the only economists who have built neoclassical economics based on the marginal principle. Its pioneers can be found dating back to Italy in the 16th century. The purpose of this paper is to give a bird's-eye view of the academic activities of various researchers who have colored the surrounding academic environment in a brief, while giving an overview focusing on the academic achievements of Walras as the one of those who led to the marginal revolution.

Keywords: Marginal revolution, Walras, The law of distribution, Utility function, Integrability issue

１．限界原理の源流ー稀少性、限界効用、価値論ー

1870年代に一時期を画した限界革命に対して、そこに連なる道程を指し示した限界効用理論の源流は、どこに求めることができるであろうか。周知のように、それはイタリア、フランス、スウェーデン、イギリス、アメリカにそれぞれ見出し得るが、本稿ではまず19世紀のワルラス経済学とローザンヌ学派を支えた16～18世紀のイタリアに着目してみたい。

イタリアの経済学思想については、効用思想を説いて1588年に『貨幣論講義』を著したベルナルド・ダヴァンツァーティ（Bernardo　Davanzati）（1529～1606

年）に遡ることができる。ダヴァンツァーティはその著書の中で、価値の源泉について言及しており、「全ての人はその欠乏と願望の全てを満たすあらゆるものを買い・・・（それは）食欲と快楽とにその尺度を求め・・・欲望はその尺度を・・・ものの卓越性、稀少性、潤沢性・・・に求める」として、価値・価格を決定する基本的要因として、財の利用によって得られる主観的な欲望の強度、即ち効用、及び稀少性が果たす役割を明確に認識した思想を読みとることができる[1)]。

ダヴァンツァーティの後継者と目される経済学者には、フェルディナンド・ガリアーニ（Ferdinando Galiani）（1728～1787年）が居る。ガリアーニは1750年の主著『貨幣論』の中で、価値を決定づける要素に稀少性（rarità）と効用（utilità）を取り上げ、両者による財の価値決定について論じた。ガリアーニは効用について、「我々に幸福をもたらす一物が持つ能力」或いは「真の快楽を生み出す、すなわち熱情の刺激を満たす物全て」との定義を与え、稀少性については「一物の量とそれになされる使用との間の比率」と定義し[2)]、言い換えれば稀少性は「ある物の現存量と、人がこれに対して持つ有用性の関係」との定義を与えた上で[3)]、財を数量的に限定して稀少性に係る個別具体的な状況を設定した上で、消費者心理、これを効用と言い換えることができると思われるが、これと結びつけて財の価値論を展開させた。また、ガリアーニが謂う価値とは、一人の人間の評価判断に基づくある物と他の物との比率である。それは二者以上の交換経済で成立する財の交換比率ではない。従って、ガリアーニにあっては孤立した一人の消費者から成る経済が前提されている[4)]。

また、ガリアーニが謂う財消費の効用は追加的消費に対する効用であり、かつそれまでに消費した財のストック量に依存しており、既に消費したストックが大きいほど追加的効用は小さくなる。即ち、ガリアーニの効用は消費されたストック量の減少函数となっている。このように、ガリアーニが暗黙裡に前提している効用は、実は限界効用と等価であり、かつ限界効用逓減則に従うものと言えるのである[5)]。

---

1) 丸山（2010）、p. 682、p. 687
2) 黒須（1987）、pp. 46～47
3) Schumpeter（1954）東畑、福岡（2005）（上）、pp. 544～545
4) 川俣（1988）、p. 283
5) Ibid., pp. 285～286

こうした点からガリアーニの議論に、19世紀後半に開花する限界効用理論の萌芽を読み取り得るわけであるが、しかし財の数量変化に即した効用の段階的変化のプロセスについての詳細な分析的言及を欠いていることから、ガリアーニについては限界理論まであと一歩及ばなかったとする評価が一般的である[6)]。シュンペーターは、ガリアーニの相対的稀少性の概念は限界効用に極めて近かったと言えるものの、ガリアーニをジェヴォンズ、メンガーと隔てるものは限界効用の欠如であったと断じている[7)]。

ガリアーニ以後、価値の効用と稀少性理論の彫琢を進め、限界原理に極めて近い位置にまで迫った消費者行動理論を一世紀先取りしているのが、エティエンヌ・ボノ・ド・コンディヤック（Etienne Bonnot de Condillac）（1714～1780年）である。元来、認識論哲学者として著名なコンディヤックは、彼が著した唯一の経済書であり、かつアダム・スミスの国富論の刊行年と同じ1776年に出版された『相互関係に於いて考察された商業と政治』の中で、価値を決定する諸要素としてガリアーニと同じく効用（utilità）と稀少性（rarità）を取り上げ、さらに二者二財の限定された孤立交換形態に基づき、諸物の価値の基礎として相対的価値について論じている。コンディヤックは二者二財の交換に於いて、二者は各々自分自身にとって余分な財と稀少な財を保有しており、交換によって余分な財を手放し稀少な財を入手することで、共に自分自身の効用を増大させることで成立する交換均衡について論じている。ここでコンディヤックは財を手放すことで失われる効用と、新たに財を手に入れることで獲得する効用とが等しい配分であることを提示している[8)]。しかしコンディヤックはこのような交換形態を多数財に拡張して論じておらず、また交換を規定する交換比率としての価格とその決定メカニズムが論じられていないことから、消費者行動理論としては不十分と言わざるを得ない。

イタリアのガリアーニからフランスにもたらされた思想を受け継ぎ、限界革命をフランスにもたらした最初の一人と目される経済学者に、アンヌ＝ロベール＝ジャック・テュルゴー（Anne-Robert-Jacques Turgot）（1727～1781年）が居る。1769年の主著、『価値と貨幣（Valeurs et Monnaies）』の中で、財の価値につい

---

6) 松浦（1968）、p. 935
7) Schumpeter（1954）op cit.（上）、p. 545
8) 川俣（2016）、p. 126

てそれは複数の財の間での消費によって、充足される欲望に係る個人の主観的な比較評価の結果、選び取られた財に対して賦与されるものとしており、財の価値を複数財相互間の比較評価によって決定される相対的価値であるとしている。また、そのようにして比較考量される欲望[9]、即ち効用はその絶対量に意味のあるものとするよりはむしろ相互間の大小的順序関係、即ち序数的測度としての意味に意義があると捉えられている。

また、テュルゴーは財の価値を個人の欲求、及び財の通時性、即ち一時的な欲求に限定されることなく将来を見据えた一定期間内の消費計画に資する度合い、そして稀少性の三つの要素によって決定されるとし、これらの三要素によって決定される財の価値を「尊重価値（valuer estimative)」と呼んだ[10]。この三要素のうちの個人の欲求についてテュルゴーは、「(財についての）評価は全く固定したものではなく、人間の諸々の欲求の変化に応じて刻々に変化する。・・・空腹の時は・・・一片の鳥獣の肉を尊重するだろうが、空腹が満たされ、彼が寒さを感ずる時は熊の毛皮が・・・貴重になる」と述べて、刻々と変化する消費財の保有量に対応して変化する欲求は、基本的に財の追加的一単位を消費して得られる追加的効用、即ち限界効用をテュルゴーは明示していたと言えるのである[11]。

19世紀に入ってからは、1854年の著書で「最後の微少量の効用（value of the last atom、原著書では“Werth der letzten Atom”)」と言う表現を用いて、交換に於いて受け取る価値と相手に譲渡することで失われる価値の大小比較を考察した、ヘルマン・ハインリッヒ・ゴッセン（Hermann Heinrich Gossen）(1810～1858年）を見出すことができる。即ち、交換によって獲得される価値が譲渡によって失われる物品の価値喪失分を上回る限り、人々は交換を続けることが有利である。そして、このような交換は続けられることで次第に逓減していく価値傾向のもとで、譲渡される物品と受け取る物品の最終単位の価値が等しくなるまで有利であり続けるとする記述を残している[12]。ゴッセンにあっては、限界効用の概念提起に加えてゴッセンの第一法則として周知されている、限界効用逓減則についても

---

9) 効用というターミノロジーについて、ガリアーニ、コンディヤック、テュルゴーらは「欲望（désir)」、「欲求（besoin)」、「効用（utilité)」、「人の欲求（besoin de l’homme)」と表現している（川俣（2010)、p. 65)

10) 川俣（2010)、pp. 63～65

11) Ibid., pp. 65～66

12) Gossen（1854）池田（2002)、pp. 99～101及び、現著書の p. 84

明示的に述べている。

1870年代初頭の所謂限界革命と称されて、近代の経済学に一大転換期をもたらした三銃士の一人ウィリアム・スタンレー・ジェヴォンズ（William Stanley Jevons）（1835～1882年）は1871年の著書の「第３章　効用の理論」の中で「最終効用度（final degree of utility）」という用語を用いている[13)]。解析的には消費財の量 x が微少量 Δx だけ増加した場合の効用 u の増分を Δu とした時に、その比 $\Delta u/\Delta x$ の極限をとって $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ とした時に、これをジェヴォンズは「効用度」と呼び、かつ効用度は消費財の量の函数と考えられた効用 $u(x)$ の x に関する微係数であるとする表現を用いている。そして、最終効用度を表現する函数の変動が経済諸問題上もっとも重要であるとする。加えて、一般法則として効用度は財の量とともに変動し、究極的には財の量の増加とともに減少するとして、限界効用逓減則について言及している[14)]。

ジェヴォンズは別のところで、２つの用途を有する財の消費に於いて各々の用途に対応する財の量 x, y 及び消費の増量 $\Delta x, \Delta y$ と、それらの消費に伴う効用 u_x, u_y 及び効用の増分 $\Delta u_x, \Delta u_y$ について、総効用を極大化する条件として２用途の限界効用均等則 $\mathrm{d}u_x/dx = du_y/dy$ に触れており[15)]、ゴッセンの第二法則に準ずる言及を提示している。

ワルラスは、1926年の著書で「稀少性（rareté）」という用語を用いて、「商品の消費量によって充足せられる最終の欲望の強度」と定義しており、解析的には消費量 q の函数 $\phi(q)$ で与えられる効用を $u = \phi(q)$ としたとき、稀少性はその導函数 $\phi'(q) = d\phi(q)/dq$ で与えられるとしている[16)]。この場合にワルラスが謂う「稀少性」とは限界効用そのものを指す。この用語は、レオンの父であるオーギュスト・ワルラスが用いていたものをレオンがそのまま踏襲したとされている[17)]。

アメリカのジョン・ベイツ・クラーク（John Bates Clark）（1847～1938年）は1899年の著書の中で、ある消費者が同種の商品を続けて複数受け取る過程で、手に入る商品の数量が増大するにつれて利益の量は着実に減少していくと述べ、最

13) Jevons（1871）小泉 et al.（1981）、p. 40
14) Ibid., pp. 39～41
15) Ibid., pp. 45～46
16) Walras（1926）久武（1983）、pp. 79～80
17) Schumpeter（1954）op. cit.（下）p. 560

後に受け取る商品の価値がそれまでに受け取ったもののうちで最小になると謂う、所謂ゴッセンの第一法則と全く同じ考えを述べ、この最後に受け取る商品から得られる効用を「最終効用（final utility）」と呼ぶ。そして、クラークは最終効用を、同種の品物を入手する一連の連続した行為のなかの最終取得物の有用性（（final utility）means the degree of usefulness that the last of a series of similar articles possesses）と定義している。またクラークは「固有の効用（specific utility）」という表現をも用いて、物品をより多く手に入れるに従って固有の効用が逓減していくとすれば、それらがある単位との交換に与えるものは最後の単位の「固有の効用」によって測定されるであろう（will be gauged by the specific utility of the last one）と述べている[18)]。

ヴィルフレド・パレート（Vilfredo Frederico Damaso Pareto）（1848～1923年）は「基本有用度（ophélimité élémentaire）」という表現を用いている[19)]。

ジェヴォンズ、ワルラスと同じく限界革命三銃士の一人に数えられるカール・メンガー（Carl Menger）（1840～1921年）については、限界効用に関連する特段の表現を見出すことができないが、帰属理論を提示した1871年の著書の中で、「ある財が・・・欲望の満足に役立ち・・・その欲望が・・・満足させられている度合いに応じて次第に減少・・・すれば・・・財の支配可能数量を・・・最高の意義を持つものの確保に使用し、次にその意義に於いて第一のものに次ぐ具体的欲望満足の確保に残りを使用し・・・この進み方の結果、もはや満足させられなくなった具体的欲望の最も重要なものは・・・一切の種類の欲望に関して常に等しい意義を持つことにな」ると述べて[20)]、限界効用とその逓減則、及び複数財の交換に於ける限界効用均等則を示唆させる記述を提示している。

オーストリア学派の領袖となるカール・メンガーは、1871年の『国民経済学原理』で生産要素の価値決定に関する帰属価値、損失原理を提唱した。但し、メンガー自身はこうした呼称を用いていない。メンガーの帰属理論を固定的生産係数について、より明瞭に論じたのは、1884年の『経済的価値の本源と主要法則』を著した、メンガーの高弟でウィーン大学のフリードリッヒ・フォン・ヴィーザー

18) Clark（1899）田中 et al.（2007）、pp. 42～43、及び、原著 Clark（1899）liberty Fund（2011）、pp. 32～33

19) Schumpeter（1954）op. cit.,（下）p. 560

20) Menger（1871）安井、八木（1999）、p. 85

（Friedrich von Wieser）（1851～1926年）だった）。このヴィーザーの帰属理論を継承し、帰属メカニズムを論じたのが、1893年に『価値・資本及び地代』を著した、スウェーデンのクヌート・ヴィクセルだった。

フィッシャーは限界効用について、「さらにもう一単位を求める欲求（desire for one more unit）」という表現を当てている[21]。因みに、限界効用（Grenznutzen）というターミノロジーはヴィーザーの命名とされている[22]。

このような限界原理は、その登場以前の経済学に対して微積分を主とした強力な解析的分析手法を導入した点に、まさに革命と称されるに相応わしい意義があると言えるが、さらには消費者行動に於ける効用の極大化と企業の生産活動における利潤極大化といった、経済行動の最適化原理を明晰に分析・提示するためのツールとして、微積分に拠る数学的解析手法を導入したと謂う点に、その画期的意義が求められる。しかし、以上に見たように限界原理を構築し理論彫琢に勤しんだ研究者は、ワルラス、メンガー、ジェヴォンズの三銃士に限定されるものではなく、16世紀のイタリアや18世紀のフランスに於いてその輝かしい萌芽をはっきりと認めることができる。長い年月に渡って恰も腐葉土のように蓄積された学術成果の上に、ワルラス経済学が漸次成熟した数理経済学の果実を実らせていくこととなる。

以下では、論点をワルラス経済学に移すこととして、ワルラスの足跡とその経済学上の功績、並びにワルラス経済学の形成に寄与した同年代の研究者たちの議論と学術成果について見ていくこととする。

2．レオン・ワルラスの足跡

1834年12月16日に、フランス、ノルマンディ州の地方都市エヴルーで、マリ・エスプリ・レオン・ワルラス（Marie Esprit Léon Walras）（1834～1910年）は生誕した[23]。レオンは、大学入学資格試験（バカロレア）を1851年に文系、そして二十歳を迎えた1853年に理系で合格し、エコール・ポリテクニーク（理工科大学校）を目指すが、その後二度の受験に失敗した。レオンはエコール・ポリテクニー

[21] Schumpeter（1954）op. cit.,（下）p. 302
[22] Schumpeter（1954）op. cit.,（下）p. 560
[23] 福岡（1985）、p. 319

クの二度目の受験準備中に、アントワーヌ・オーギュスタン・クールノー（Antoine　Augustin Cournot）（1801～1877年）の1838年出版の『富の理論の数学的原理に関する研究』[24]に初めて触れ、大きな影響を受けていた[25]。その中で、クールノーは価格の函数としての需要函数を明示しており、ワルラスは後年こうしたクールノーの分析アプローチから、大きな影響を受けることとなる。その後、レオンはエコール・ド・ミーヌ、所謂鉱業学校に進学した[26]。しかしそこでの鉱山技術習得に係る勉学には全く興味が湧かず、哲学や文学に没頭する。

ところで、レオンの思想形成に甚大な影響を及ぼしていた人物として、父、アントワーヌ・オーギュスト・ワルラス（Antoine Auguste Walras）に触れずにはいかない。それは恰もジェームズ・ミルに触れずに、その嫡男ジョン・スチュアート・ミルを語ることができないの如きものである[27]。オーギュストは1801年２月１日に南仏地中海にほど近いモンプリエに生を受けた。オーギュストはモンプリエの中学校で学んだ後に、パリの高等師範学校に入学するが、その時の級友の中にクールノーが居たことは極めて興味深い事実である。オーギュストは高等師範学校卒業後は中学校教師を務め、パリに渡った後に私人の家庭教師、秘書、会計係を点々とした後に経済学を志すこととなり、パリ滞在期間中はサン・シモン派の会合にも足繁く通うこととなり、空想的社会主義の薫陶を受けた。1831年には、それまでの経済学研究の成果をまとめた『富の性質及び価値の起源について』を著している[28]。このような父の影響を受けていたレオンは、サン・シモン派の考え方や、土地国有化論をはじめとする社会主義的思想に共鳴する。

その後、レオンは、1860年に『経済学と正義：プルードン氏の経済学説の批判的検討と反駁』を著したが、これはレオンの経済学上の処女出版であった。この時、レオンは父オーギュストから示唆を受けていた経済学への数学の適用可能性に確たる自信を得るところとなり、純粋経済学が数学の形態を取って樹立されたと、レオンは後年の自叙伝の中で述べている[29]。レオンは父より経済学を志すことを諭され、経済学者への道を歩み始めることとなるのが1858年、レオンが24歳

24) Cournot（1838）
25) 御崎（1991）、p. 7
26) 福岡（1985）、p. 320
27) 安井（1970）、p. 6
28) Ibid., pp. 6～ 7
29) Ibid., pp. 12～13

の夏である[30]。しかしこの時期のフランス経済学会はジャン＝バティスト・セイ（Jean-Baptiste Say）（1767～1832年）の末流で、自由貿易協会を設立するなどの自由放任主義を奉じ、フランス立法議会の議員も務めたフレデリック・バスティア（Frédéric Bastiat）（1801～1850年）らによって牛耳られ、排他的・門閥的空気に満ちており、レオンの食い込める余地はなかった。こうして、フランスの大学教員の口は無く、レオンは失意の中、雑誌記者、鉄道会社の書記などで悶々としながら過ごした。そんな折には、父オーギュストはレオンに対して激励を惜しまず、「静かに行く者は健やかに行く、健やかに行く者は遠くまで行く、というイタリアの諺を自分自身に向かって繰り返しなさい」と告げた[31]。

1860年にローザンヌで国際租税会議が開かれ、レオンも会議での活発な討議に参加するとともに、ヴォー州の租税を主題とする懸賞論文にも応募した。結果は、プルードンが一位、レオンは四等に終わったが、会議に参加していた州の官吏や一般大衆はレオンの発表を高く評価した。そして論文発表の場にはルイ・リュショネー（Louis Ruchonnet）が居た。その時彼は未だ若い一官吏に過ぎなかったが、のちにスイス・ヴォー州教育宗教局長という高官に昇格し、レオンにローザンヌ・アカデミーでの教職の機会を斡旋することとなる。リュショネーは会議の場でレオンによる学術成果の発表に感銘を受け、長く彼の記憶の中にレオンの印象を留め置く事になる。そしてそのことがきっかけとなって、1869年にローザンヌ・アカデミーの法学部の中に新設されることとなった、経済学講座の教授職の選抜公募に応募するよう、リュショネーはレオンに進言することとなる[32]。そしてレオンは選抜試験に合格した。レオンは1870年12月16日、この日は奇しくも彼の36歳の誕生日でもあったのだが、この日にローザンヌ・アカデミーの法学部で、レオンは経済学教授としての最初の講義を行った[33]。この日から数えて1892年に退職するまでの23年間を、ローザンヌ大学（1890年にローザンヌ・アカデミーからローザンヌ大学に昇格）で奉職した。

---

[30] 福岡（1985）、p. 321
[31] 安井（1970）、pp. 14～16
[32] Ibid., pp. 13～14
[33] 福岡（1985）、p. 324

3．ワルラス経済学の方法論
ー経済学への数学的解析手法の導入をめぐってー

ワルラスは、父オーギュストの思想、そしてクールノーの影響のもとに、経済学に数学的解析手法を積極的に導入した先達の一人であり、交換と一般均衡の経済学、生産方程式、資本形成と信用の分野に於いて、1873年から1876年にかけて主著である『要論』[34]とその要約版[35]の中に果敢に数学的手法を導入し、これを公表した。同じように経済学へ数学的手法を導入した先達達の中には、価格を独立変数とする需要函数の議論でワルラスに多大な影響を及ぼしたクールノー（1838年）[36]、ワルラス、ジェヴォンズがともに限界効用理論の先駆者と認めたゴッセン（1854年）[37]、ワルラスと同時代に限界効用理論を発展せしめたジェヴォンズ（1871年）[38]、無差別曲線を交えたボックスダイアグラムを考案したエッジワース（1881年）[39]、効用函数の存在証明の問題を積分可能性問題として詳細な数学的議論を展開したアントネッリ（1886年）[40]、限界生産力と分配問題の先駆者であるウィックスティード（1894年）[41]、そのウィックスティードの分配論を生産函数の一次同次性を前提することなく、より一般的な形で展開したバローネ（1895年）[42]、アメリカの経済学の先達であり、かつ限界生産力説に立脚した分配理論を展開したクラーク（1899年）[43]、交叉価格効果を持つ関係財の価格変動を考慮した需要分析を展開したスルツキー（1915年）[44]らが居た。一方、ワルラスが書簡を交わした経済学者や数学者の中には、経済学という社会学的学問分野に数学的解析手法を適用することに対して、激しい拒否反応的見解を露わにする識者が少なからず居た。その一人にアルフレッド・マーシャル（Alfred Marshall）

---

[34] Walras（1926）久武（1983）
[35] Walras（1877）柏崎（1984）
[36] Cournot（1838）中山（1936）
[37] Gossen（1854）池田（2002）
[38] Jevons（1871）、小泉 et al.（1981）
[39] Edgeworth（1881）、p. 28
[40] Antonelli（1886）Chipman（1971）
[41] Wicksteed（1894）川俣（2000）
[42] W. Jaffé（安井、福岡）（1977）、p. 84
[43] Clark（1899）田中 et al.（2007）
[44] Slutsky（1915）

（1842～1924年）が居る。

マーシャルとワルラスとの間では、1882年から1889年にかけて書簡が交わされている。マーシャルのことを知ったワルラスは、彼宛にいくつかの論文を送り、その礼状が1883年３月20日付けでマーシャルから送られてきたのを皮切りに、ワルラスから四通、マーシャルから八通の書簡が送られている[45]。しかし、両者の関係は、経済学に於ける数学的手法の導入を巡って感情的とも取れる対立関係に入っていく。

1889年９月19日付けのマーシャルからワルラスに宛てられた書簡の中で、数学は経済学の後景（the back-ground）だとする表現（I have not myself retired from the conclusion that I think I communicated to you some time ago, viz that the right place foe mathematics in a treatise on Economics is the back-ground.）が送られるが[46]、これに不快感を覚えたワルラスと、マーシャルとの両名間の文通は途絶える。マーシャルは1890年に『経済学原理』を発表するがワルラスには送らなかった。またワルラスは1894年８月26日付けのバローネ宛書簡の中で、「（マーシャルは）経済学の推論を数学式に翻訳することはそれを行う人々には恐らく非常に役に立つが、他の人々には全く何の役にも立たないと書いて（おり）・・・あの時以来、私は彼を数理学派の敵方に入れ」ることにしたと述べ[47][48]、マーシャルに対する強い敵意を露わにしている。

ワルラス、ジェヴォンズとともに限界革命三銃士と並び称せられたカール・メンガーも、ワルラスとの間で交わされた書簡を通じて、経済学分野への数学導入の是非を巡る意見を取り交わしている。両名の書簡は、1883年６月28日のメンガーからワルラスへ宛てられた書簡に始まり、その後1896年12月５日のメンガーからワルラスへ宛てられた書簡で終わるまでの間、ワルラスから三通、メンガーから四通の書簡が交わされている[49]。

最初にメンガーからワルラスに宛てられた1883年６月28日書簡の中で、ワルラスの著書『社会的富の数学的理論』の送付に対する礼状と併せてワルラスに対し

---

45) 丸山（2009）、p. 75
46) W. Jaffé（1965）、Vol.ll, p. 355, Letter NO. 922
47) Ibid., pp. 613～616, Letter NO. 1188
48) 丸山（2009）、p. 77
49) 武藤、中野（1991）、pp. 113～128

てメンガーが述べた意見は辛辣である。「所謂数学的方法で私たちの学問（経済分析）を取り扱うことに賛同できません。・・・数学的方法は説明、証明の方法であり研究の方法ではないと思っています。・・・私たちの学問の多くの問題にとって非常に有用ではありますが研究の本質には到達しないのです。・・・とりわけ量的関係が重要な場合に於いてのみ、数学はその資格に於いて研究を新しい結果に導くのです。しかし、その場合に於いても数学は唯一の方法ではなく、単に経済学の補助学であるに過ぎません」[50]と述べるメンガーの言質には、数学を経済学の後景（the back-ground）と表現したマーシャルとの親和性を窺わせる。

メンガーはその主著『国民経済学原理』の中で、「真実で永続的な進歩は・・・科学的観察の対象を単にバラバラな現象として見るのではなく、それらの因果連関とそれらを左右する法則を探究しようと努力するときに初めて開始され・・・諸財を内的原因に従って秩序づけ、各財がその因果関係のうちで占める位置を学び取り・・・諸財を左右している法則を探究」[51]することの意義を強調する。即ち、価格や交換などの経済現象を表層的現象であると断じ、経済学が真に突き止めるべきことは表層的現象の背後にある窮極的かつ一般的法則、即ち経済の本質たる精密法則を探り当てることであるとする。メンガーは、上の窮極的かつ一般的法則を探究する方法を分析的方法と呼び、他方、個々の表層的な経済現象の派生経緯を解明する方法を総合的、或いは構成的方法と呼ぶ。数学的方法論に対するメンガーの否定的見解は、数学的手法が経済の本質に向かうための分析的経路を経ずに、先見的な公理から出発して演繹的手法に則ることに対する批判にあった[52]。

メンガーは、1884年２月の日付無し[53]のワルラス宛書簡の中で、自説を更に強調する。即ち、「私は純粋経済学に於いて従うべき方法は、只管数学的と呼ばれるものではあり得ず・・・私達が研究するのは単に（経済現象の）量的関係であるばかりでなく、経済現象の本質をも研究するのです。・・・しかしいかにしてこの本質（例えば価値、地代、企業者利潤、分業、複本位制等の本質）の認識に数学的方法によって達するのでしょうか。数学的方法は・・・経済問題の解決に

---

50) W. Jaffé（1965）、Vol.l, pp. 768～770, Letter NO. 566
51) Menger（1871）安井、八木（1999）、p. 9
52) 武藤、中野（1991）、p. 116
53) W. Jaffé（1965）、Vol.ll, pp. 2～6, Letter NO. 602

とって妥当なものではなく・・・経済現象の法則の決定にとってさえも数学的方法が適当であると認めることは決してできません」[54]と述べ、経済学の本質探究を宗とする方法論にとっては数学的手法がいかに無力であることを、メンガーは強い調子で主張している。

また、ワルラスはフランスの数学者であり、数論、微分幾何学、熱力学の分野で功績を残したジョゼフ・ルイ・フランシス・ベルトラン（Joseph Louis François Bertrand）（1822～1900年）とも1876年から1878にかけて三通の短い往復書簡を交わしたほか、ワルラスはフランスの科学アカデミーの学会誌であるルヴェ・デ・ドゥ・モンド誌に、「数学の新分野：経済学への数学の応用」と題する論文を寄稿している。ベルトランはエコール・ポリテクニークとコレージュ・ド・フランスで教授を務め、フランス科学アカデミーのメンバーに就任し、26年間常任書記を務めた人物であり、素数に関するベルトラン予想[55]を始めとする数学上の功績で著名である。さて、ワルラスが寄稿した論文は、この時ベルトランによってほとんど即断で一蹴された[56]。

ベルトランは、ジュルナール・デ・サヴァン誌の1883年９月号で、数理諸科学の分野に於いて経済学をはじめとする社会科学的領域への数学的手法導入の萌芽に対する手厳しい攻撃を加えている。そして、ベルトランの攻撃は数学も経済学もともに十分な理解の及ばなかった人々によって権威ある非難だと切実に受け止められることで、その真価以上の注目を浴びることになった[57]。元来、ベルトランは心理学或いは経済学といった、数学的把握を困難とする学問分野への数学的解析手法の導入に強い違和感を持っていた。唯一、彼が社会科学的領域への導入を是認した数学的手法は、応用確率論であった[58]。

効用の可測性を巡って、フランスの数学者ポール・マテュー・ヘルマン・ロラン（Paul Matthieu Hermann Laurent）（1841～1908年）は、ワルラスに対してその書簡の中で辛辣な批判を浴びせ、ワルラスを動揺させた。ロランは、フランスの理工学校で教えたのち、フランスで保険数理士を擁するアクチュアリー協会を

---

54) 武藤、中野（1991）、p. 121

55) ベルトランは、自然数 N について、$N>3$ の時、N と $2N-2$ の間に少なくとも一つの素数があると予想した。1850年に数学者チェビシェフがこの予想を証明した

56) 武藤（1993）、p. 34

57) Schumpeter（1954）op.cit.,（下）、p. 388

58) 武藤（1993）、p. 36

創設。そのほか、農業専門学校で教授に就任するなどの多彩な学術活動に従事した[59]。このヘルマン・ロランが1900年5月13日にワルラスに宛てた書簡の中で、満足というものが測定可能であるという考えに、数学者として断じて受け容れられないという、効用の可測不可能性に関する激しい意見を寄せた。ロランは効用函数の可測な形、即ち基数的効用函数を取り上げ、効用函数の存在証明のために積分可能性条件に言及しつつ、効用函数と需要函数から構成される全微分方程式が積分可能であれば効用函数の存在が保証されるのであり、従って積分可能条件が確かめられることで効用函数そのものの定量化、即ち基数的効用函数を前提とした議論を回避し得るとするコメントをワルラスに送っていた[60]。なお、積分可能性問題については、別途、後段で詳細に検討する。

4．ワルラス経済学を形づくった諸学派

ワルラス経済学は、様々な学問的諸潮流が流れ込むことによって、豊穣な学術的果実を実らせてきた。その一方で、前述したように、研究者の中にはワルラスの方法論の、特に数学的手法の導入に対して感情的に敵対し、拒否反応を露わにした者達も数多く居た。ここでは、主として、ワルラスがローザンヌ・アカデミーで活躍していた当時のフランス数理物理学会、ジェヴォンズとの交流、そしてイタリアの経済学会に焦点をあて、ワルラス経済学に対してどのような関わりを見せてきたのかについて、若干の俯瞰を試みる。

⑴ワルラス経済学とフランス数理物理学界

ワルラスが1874年6月に純粋経済学要論の初版を出版したときに記された連立方程式体系の源泉として重要なものに、ルイ・ポアンソ（Louis Poinsot）（1777～1859年）の『静力学要論（Eléments de statique（1803））』があり、特に未知数と同数の連立方程式を解いて均衡解を求積する手順は、ポワソンの書物の中にそっくり見出すことができる[61]。また、フランス人技師アシーユ・ニコラ・イスナール（Achylle-Nicolas Isnard）（1749～1803年）の『財富汎論（Traité des

59) Ibid., p. 32
60) W. Jaffé（1965）、Vol.lll, pp. 116～117, Letter NO. 1452
61) 福岡（1985）、p. 326

richesses（1781））』の著作の中にも、未知数と方程式の本数一致を与えるワルラス法則のアイディアや、ニュメレールの着想などが散見される[62]。例えば、上記のイスナールの著書では多数財の交換に係る交換方程式が提示され、交換される多数財の価値の比を与える算術式が与えられている。また、イスナールはある商品の一単位を他の全ての財の価値の共通の尺度とすること、即ち、ワルラスが取り上げた価値尺度財（ニュメレール）のアイディアを提示するなど、複数の経済財相互の依存関係を明確に認識した上での理論構築を行なっており[63]、ワルラスの一般均衡理論に繋がる道筋の一端を用意していたとも言えるものである。イスナールはシュンペーターによっても、「市場価格は需要と供給を通じて作用する諸力の影響を受けて変動するとされ・・・この時代（1780年代）に於いてこの線に沿った分析の中で首位を占める業績はイスナールのそれであり・・・これは・・・ワルラスを思わせるようなやり方で、価格の世界の中での相互依存関係を記述したものである」との高い評価を与えられている[64]。

また、ワルラスは、需要函数をはじめ、クールノーからの影響に負うところが大きい。まず、均衡と裁定についてである。クールノーは、多数財が交換に於いて到達する均衡状態では、裁定取引の余地がないことを、『富の理論の数学的原理に関する研究』の「第三章　為替について」で明示した[65]。この視点からジェボンズの交換方程式の解を吟味すると、実は裁定の余地が残されており、均衡解としては不完全解であることが明らかになった。これを示したのが、ヨーハン・グスタフ・クヌート・ヴィクセル（Johan Gustaf Knut Wicksell）（1851～1926年）の1893年の『価値・資本及び地代』であった。ヴィクセルは、上の著書の中で、二財の交換である直接交換と仲立人が介在する三財以上の交換を経て直接交換に至る交換形態を間接交換と呼んで、明示的に考察する。即ち、「ジェヴォンズは彼の方程式によって表される均衡状態が仲立商売や貨幣取引、信用取引の可能性を原理的に排除しているから、ひとたび間接交換形態の登場が許されるや、均衡は破壊されるであろう」と述べている[66]。即ち、「ある者は(*A*)と(*B*)との直

[62] Ibid., pp. 326～327
[63] 御崎（2009）、pp. 104～106
[64] Schumpeter（1954）op.cit.,（上）、p. 556
[65] Cournot（1838）中山（1936）、pp. 54～57
[66] Wicksell（1893）、第一編第 6 章　多数財の交換、間接交換 pp. 84～90

接交換を(A)と(C)および（C）と（B）の間接交換に代え・・・・この間接交換は裁定と呼ばれる」[67]と述べている。

ここでワルラスは、m 種類の財に対応して、各々二つずつの財の価格比が裁定取引上で登場する全ての２組の財の価格比に等しくなければならないとする。即ち、価格 p_a、p_b を有する各々の財(A)、(B)間の直接取引での価格比を p_{ab} とすると、$p_{ab}=p_{ac}/p_{cb}$ と表せて、これを任意の二財の直接交換に拡張すると、式の数は価値尺度財を適用して一般均衡方程式が$(m-1)(m-1)$本、書ける。加えて、m 種類の財の交換方程式が $m-1$ 本、需要方程式が $m(m-1)$本、導けるから式の数は全部で$(m-1)+m(m-1)+(m-1)(m-1)=2m(m-1)$となる。一方、その根は m 種類の財の相互交換の価格と数量が、各々 $m(m-1)$個ずつあるから、未知数の合計値は$2m(m-1)$個となって、根の数と式数とが一致して、交換に参加した m 種類の財全ての価格と需要が数学的に決定されることを示すことで、財の交換に於ける裁定取引の問題を回避することに成功した[68]。

加えてクールノーは大数の法則に準拠して、個別の消費者行動についてはそれらを集計して大量現象としての消費者行動とみることで、各々の不規則性と不連続性が相殺されて、滑らかで規則性に富む量を得ることができることを主張した。クールノーのこの議論には二つの論点がある。一つは、集計化によって個別の確率論的不規則性が相殺されて、決定論的変数としての扱いを可能とすることを示したこと、もう一つには、個別にみると不連続な経済的行動も集計によってその動きの凹凸が相殺され、滑らかな連続量として扱い得るとしたことである。こうして、クールノーは一つ目の意味での大数の法則を介して確率論的世界から脱却し、決定論的な函数解析学へと歩みを進めると共に、もう一つの意味での大数の法則を通して経済変数を連続量として扱うことで、微分積分学への道を開拓したとも言える[69]。

ところで、ここでクールノーの考え方には函数の連続性と微分可能性の混同が窺える[70]。クールノーは主著である『富の理論』の中で、「いま函数 $F(x)$ を以て連続なりとすれば…価格の変動が原価格の小分数なる限り、需要量の変動は明白

---

[67] Walras（1926）久武（1983）、p. 127

[68] Ibid., pp. 128～131

[69] 武藤（1993）、p. 49

[70] 例えば、函数 $y=|x|$ は連続であるが微分可能ではない

に価格の変動に比例する…これらの変動はその符号を異にする、換言すれば、価格の騰貴は需要量の減少に相応ずるのである[71]」と述べている。しかし、微分可能性を論ずる上では、単なる連続性の担保のみでは不十分であり、所謂一様連続の概念が必要となる。しかし、これはクールノーと同時代の数学者であるオーギュスタン＝ルイ・コーシー（Augustin-Louis Cauchy）（1789～1857年）の業績を俟たなければならなかった[72][73]。

一般均衡体系に於ける超過需要の総和が恒等的に零を与えるワルラス法則、そして価値尺度財の発想についても、前述のイスナールのほかにワルラスはクールノーの着想にも依っている。また、クールノーは独占的競争から始まって、寡占的競争に移り、最後に完全競争へと至る順で議論した。クールノーは元々、フランスの数学者のシメオン・ドニ・ポアッソン（Siméon Denis Poisson）（1781～1840年）を師に持つ確率論分野の数学者であった。

⑵ジェヴォンズとワルラス

ワルラスとの比較的友好的な交流関係を持続的に築き上げ得た識者の一人に、限界革命三銃士の一人でワルラスよりも一歳年少のジェヴォンズが居る。1862年、ジェヴォンズは大学学術協会Ｆ部門で、『一般的数理経済理論の報告』を発表し、反響を期待したが学会からは完全に無視される。その後、1871年にジェヴォンズは『経済学の理論』を出版。その３年後にワルラスは、1874年に『純粋経済学要論』を公刊した。

ジェヴォンズとワルラスの交流は、1874年からの往復書簡を介して、終生友好的だったが、書簡のなかで両者は自説の優先権を主張し合う。最終的には、両者の成果は全く独立に作成されたものであることに両者が合意し、その後は友好的・協力的関係が維持された。同時に、1878年にワルラスもジェヴォンズも彼らが説いていた限界原理の先駆者の一人に、前述のゴッセンの存在を認め[74]、1854

---

[71] Cournot（1838）中山（1936）、p. 80
[72] 武藤（1993）、p. 42
[73] 区間 R で定義された函数 $f(x)$ について、$\forall\varepsilon,\ \exists\delta,\ \forall x,\ y\in R$ の時、$|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ の時、函数 $f(x)$ は区間 R で一様連続であるとされて、同区間内で $f(x)$ は微分可能となる
[74] 安井（1970）、p. 22

年に既に刊行されていたゴッセンの著書[75]に限界原理の先駆を見出す[76]。

ジェヴォンズは効用を構成する基本要素に快楽と苦痛を据えて、両者は同じ尺度の上に測定され、従って同じ次元を有し互いに加算し減算しうべき同種の量と見做して、加算可能な効用函数を前提している[77]。従って、交換方程式を用いて需給均衡式を導いたジェヴォンズの効用函数は、いずれも複数主体についての加法的函数である。しかし、ジェヴォンズの交換方程式には、価格によって需要・供給のメカニズムが説明されるとする認識を欠いており、そのゆえに交換が実施される誘因やメカニズムに関する説得的記述に欠けている。

このようなジェヴォンズのアプローチに対して、ワルラスは前述のように需要函数の考え方をクールノーに負いつつ、需要函数を効用の極大化から導かれるものと捉え、同様に利潤の極大化から供給函数が導かれるとの考え方をとっており、需要・供給いずれもの函数に価格を独立変数として明示的に導入し、市場での価格の伸縮によって財の需給均衡が成立するメカニズムを説明した。

⑶ワルラス経済学とイタリアの研究者達

周知のようにワルラスの学説はイタリアで後継者を見出し、ワルラスの存命中に母国フランスからついぞ受け容れられることはなかった。ワルラスはその自伝の中で、「私は定年を前に疲れ果て、1892年に教職を退いたが・・・私の理論はスイス、イタリア、ベルギー、アメリカに広まり、好意的に受け容れられたのだが、フランスではそうではなかった・・・1892年の終わりに私はつくづく思った。私の人生は、祖国を間違えた人間の人生だ」と語っている[78]。また、前述のように限界原理の源流の一端を形成した効用思想の思想的基盤は、ダヴァンツァーティを輩出した16世紀とその流れを受け継いだ18世紀のイタリアに求めることができる。

19～20世紀のイタリアの経済学研究者の中には、後年ワルラスの後継者としてローザンヌ学派を率いるヴィルフレド・パレートが居た。パレートは、ワルラス

---

75) Gossen（1854）

76) ヴィーザーはゴッセンの仕事に対して、限界効用逓減の法則をゴッセンの第一法則と命名した。他方、効用が最大化されるときの限界効用均等の法則をゴッセンの第二法則と命名したのはシュンペーターである（Schumpeter（1954）op.cit.,（下）、p. 302）

77) Jevons（1871）小泉 et al.（1981）、p. 50

78) 御崎（1991）、pp. 12～14

の一般均衡理論をイタリアに広め、しかしワルラスが最後まで固執した加法分離型効用函数をベースとする基数的効用函数の世界ときっぱりと絶縁し、エッジワースの無差別曲線と限界代替率を分析道具とする序数的効用函数を理論的基礎に据えた、所謂パレートの一般均衡理論ともいうべき独自の領域を構築しており、その功績は大きい。そのパレートをワルラスに引き合わせた人物に、ローマ大学経済学部教授で1889年に『純粋経済学原理』を著したマフェオ・パンタレオーニ（Maffeo Pantaleoni）（1857～1924年）が居る。パンタレオーニは個人及び集団に於ける快楽の極大化という概念に取り組み、成功をおさめないでもなかったとのシュンペーターの微妙な評価を受けている[79)]。

この他、イタリアの数学者で、ウィックスティードが展開した限界原理に基づく分配論を、更に一般的な形で定式化した者にエンリコ・バローネが居る。バローネについては、後段の限界生産力説と分配論の節で詳述する。アルフォンソ・デ・ピエトリ・トネッリ（Alfonso de Pietri-Tonelli）（1883～1952年）は、パレートの高弟であり、その1927年の代表的著作『合理的経済学綱要』に於いてパレートに即した均衡理論と消費者行動理論の確立に貢献している[80)]。ルイジ・アモローゾ（Luigi Amoroso）（1886～1965年）は、ピサの高等師範学校で数学を修め、ローマ大学、パリ大学で教壇に立ち、線形積分方程式の可解性に関する函数解析学の研究に従事し、後に経済学に転じて1921年には『数理経済学教程』を著すなど、パレートの一般均衡理論の動学化に努めた[81)]。シュンペータはピエトリ・トネッリとアモローゾの両名について、「（この二人）だけがパレート学派の中核に属している」と高い評価を与えている[82)]。

積分微分方程式（Integral and Integro-differential Equations）をはじめとする解析学の分野に多くの業績を残し、ローマ大学の数理物理学教授のヴィト・ヴォルテッラ（Vito Volterra）（1860～1940年）は、1901年の教授就任講演で社会科学への数学の応用を是認する演説を行い、ワルラスを狂喜させた。ただ、ヴォルテッラは、数理科学の世界に於いて直接的に測定が不可能な概念を一切受容しない徹底した実証主義の立場から、「いかなる曖昧なるものをも留めずに問題が提

---

79) Schumpeter（1954）op.cit.,（下）、p. 204
80) 松浦（1969）、p. 190
81) 丸山（2009）、p. 230
82) Schumpeter（1954）op.cit.,（下）、pp. 207～208

示できなければならない。そして量として扱われるものの中には測定を免れるものは一つたりとも含まれていてはならない（...in order that this treatment can be considered as fully justified and can lead to secure results,......the problems... should rest on definitions and postulates which contain nothing vague, and it is necessary moreover that no element, among however many that are taken under consideration and treated as quantities, should escape measurement.）」という厳格な立場を明示した[83)]。この立場は、効用函数に対して厳格に基数的性格を要求するものと言える[84)]。

パレートは、効用函数の可測性に対しては否定的な考えを取っており、後年、『経済学提要』の中で経験によって直接に与えられる無差別曲線から出発することで、効用の可測性を明示的に前提することなくオフェリミテ（Ophelimity）[85)]を含む函数の決定が可能であるとの考えに到達した。即ち、観察される所与の需要函数のもとで、極大化を通じて生成されることが予想される効用函数の存在が論理的に確認し得るとき、人は恰も効用函数で表される個人の主観的効用を極大化するべく行動に出るのだとして、人々の経済行動を説明できると考えたのである[86)]。

5．ワルラス経済学と分配論、及び効用函数の可測性問題

これまで確認したように、ワルラス経済学には極めて多彩な学術的エッセンスが詰め込まれているが、それもひとえにワルラスの単独の仕事ではなく、多くの敵対した経済学者や数学者、或いは支援を惜しまなかった同分野・異分野の研究者らとの学術的な相剋と研磨の産物であったと言える。ワルラス経済学の最大の成果は、一般均衡理論であることには何人も異議を挟むことのない論題ではあるが、無論ワルラス経済学に散りばめられている経済学的に重要な含意は一般均衡理論にとどまることはない。ここでは、先人らによる膨大な研究蓄積がなされた、ワルラスの一般均衡理論に触れることを敢えて憚ることとし、代わって同様に重

83) Volterra（1906）Chipman（1971）, p. 367
84) 丸山（2013）、p. 331
85) 効用の意
86) 丸山（2013）、p. 331

要な研究テーマであり、かつこれも既に先人らによって語り尽くされた感のある論題ではあるが、所謂新古典派の分配論、及び効用の可測性を巡る一連の議論に焦点を当て、その梗概と含意をここで改めて確認することとする。

⑴限界生産力説と分配の原理

ワルラスらの限界原理が、資源の最適配分を記述するものであるのに対して、古典派は地主、資本家、労働者の三つの階級への所得の分配を論じた。では、限界原理に基づく配分の理論は、分配の問題をも語り得るのか。この問題に1894年の『分配法則の整合』の中で最初に取り組んだのが、限界生産力説のパイオニアの一人と称されるフィリップ・ヘンリー・ウィックスティード（Philip Henry Wicksteed）（1844～1927年）であり、ウィックスティードは所謂完全分配の問題を扱った。同じく限界生産力説のもう一人のパイオニアには、アメリカのクラークが居り、その著書[87]に於いて富の分配問題を詳細に論じている。

ところでウィックスティードはその著書の中で、生産函数について、$\Pi=F(\Lambda, K)$ ならば、$m\Pi=F(m\Lambda, mK)$ となると述べることでその一次同次性を明確に前提し[88]、限界生産力説のもとでの完全分配は生産函数が一次同次であれば、全ての生産物が完全に分配し尽くされるとした。すなわち、生産物 P が様々な生産要素 $A, B, C, \cdots$ の函数 F とみなされるとき、$\frac{\partial F}{\partial A}A+\frac{\partial F}{\partial B}B+\frac{\partial F}{\partial C}C+\cdots=P$ を導出できること、そして $\frac{\partial F}{\partial A}A$ が任意の生産要素 A に分配される生産物の分け前を確定することが示され、さらに生産要素 $A, B, C, \cdots$ のそれぞれが各々の取り分を受け取った時に、生産物の総量が正確に分け前の総和になることが示されるならば、分配法則を統合する仕事が成し遂げられた事になる、とウィックスティードは謂う[89]。但し、この完全分配法則は一次同次の生産函数に対してオイラーの定理を適用することで容易に導出できるが、ウィックスティード自身はオイラーの定理については言及していない。これはアルフレッド・ウィリアム・フラックス（Alfred William Flux）（1851～1926年）によってウィックスティード論文について触れたヴィクセルの書物についての詳細な書評の中で、“*Euler' equation*”として明確に言及された[90][91]。

---

[87] Clark（1899）田中 et al.（2007）
[88] Wicksteed（1894）川俣（2000）、p. 14
[89] Ibid., p. 9

ここでは、ウィックスティードの著書並びにフラックスの解説論文に依拠して、完全分配について俯瞰してみることとする。まずは、生産量を土地と資本の函数とする。しかし、ここで言う資本は労働及び土地を生産的にするために必要な他の全てのものを含む、所謂、「一般化された資本」[92]である。加えて、土地は一定と見なされ、生産物は一般化された資本の函数とされる。ここで、ウィックスティードは、土地面積 L と一般化資本の投入量 C について、単位土地面積あたりの一般化貸本の投入量 $x=C/L$ を横軸に、一般化資本の単位投入量あたりの生産量 P/C を縦軸に取った図を下のように考える[93]。

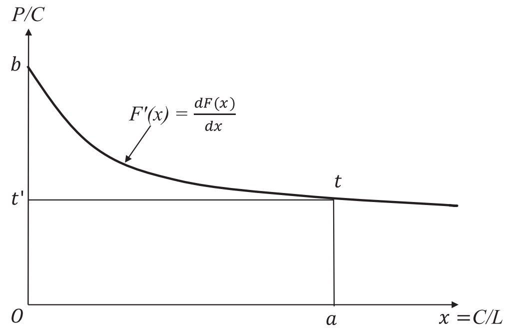

図-1　単位土地面積あたりの一般化資本の限界生産力

ここで、$F(x)$を単位土地面積あたりの一般化貸本が x だけ投入された時の単位土地面積あたりの生産量とすると、一般化貸本の収益率、即ちその限界生産力 $F'(x)=\partial F/\partial x$が上図の b, t を通る、原点に対して凸の曲線として描かれる。この曲線は、限界生産力逓減法則に従っていることから、右下がりの曲線となっている。また、明らかに、単位土地面積あたりの生産量 $F(x)$は、$F(x)=\int_0^x F'(y)\,dy$ であるから、$F(x)$は上図の b, t を通る曲線と縦軸、横軸で囲まれた部分の面積となる。今、$x=a$ に着目すると、一般化資本の収益量は $x=a$ における一般化貸本の収益率、即ち限界生産力 $F'(x=a)$に a を乗じた $aF'(a)$で与えられ、これは上の図 t, a, O, t'で囲まれた長方形の面積である。また、$x=0$ ～a における単位

[90] Flux（1894）、p. 311
[91] Stigler（1941）松浦（1967）、p. 324
[92] Wicksteed（1894）川俣（2000）、p. 12
[93] Ibid., p. 13

土地面積あたりの生産量 $F(x=0\sim a)$ は、上の図の b, t, a, O で囲まれた面積であるから、単位面積あたりの土地の分け前は上の図の b, t, a, O, t' 囲まれた面積から、t, a, O, t' で囲まれた長方形の面積[94]を減じた値、即ち、$F(x=0\sim a)-aF'(a)$ と与えられる。分配問題は、この二つの面積で表現される一般化資本と土地の各々の分け前がどのように表現されるのかを検証することである。ここで、単位土地面積あたりの一般化貸本の投入量、$x=C/L$ に対して、その逆数を、$z=L/C=1/x$ と定義すれば、z は単位一般化貸本投入量に対する土地の投入面積となる。ここで単位一般化貸本投入量に対する投入土地面積 z に対応する生産量の函数を $\phi(z)$ と定義すると、$\phi(z)$ と $F(x)$ の関係は、

$$\phi(z)=\frac{F(x)}{x}=zF(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

と書ける。式(1)を z で微分して、$z=\dfrac{1}{x}$ に注意すれば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}&=F(x)+z\frac{\partial F(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}\\&=F(x)+zF'(x)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right)\\&=F(x)-xF'(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

となって、$x=a$ と置けば、これは図で示された b, t, t'、即ち単位土地面積あたりの一般化資本の投入量 a 及び z の時点での土地の分け前そのものとなる。ここで、

94) t, a, O, t' で囲まれた長方形の縦の長さ、即ち一般化貸本の限界生産力が、その投入量 x の値に関わらず一定となっていることに注意が必要である。ここに、生産函数の一次同次条件が暗黙のうちに前提されている。一次同次の生産函数の限界生産力が一定であることは次のように示される。今、生産要素 x_1、x_2 を投入する一次同次の生産函数 $f(x_1、x_2)$ を考える。この函数は任意の定数 λ について、$\lambda f(x_1、x_2)=f(\lambda x_1、\lambda x_2)$ と書ける。今、$\lambda=\frac{1}{x_1}$ と置くと、$\frac{1}{x_1}f(x_1、x_2)=f\left(1、\frac{x_2}{x_1}\right)$、$\therefore f(x_1、x_2)=x_1 f\left(1、\frac{x_2}{x_1}\right)$ とできる。この式を x_1 について偏微分して、$\varphi=\frac{x_2}{x_1}$ と置くと、$\frac{\partial f}{\partial x_1}=f\left(1、\frac{x_2}{x_1}\right)+x_1\frac{\partial f\left(1,\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}\frac{\partial\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\partial x_1}=f(1、\varphi)-\varphi\frac{\partial f(1,\varphi)}{\partial\varphi}$、同様に x_2 についても偏微分し、$\varphi=\frac{x_2}{x_1}$ と置くと、$\frac{\partial f(1,\varphi)}{\partial x_2}=\frac{\partial f(1,\varphi)}{\partial\varphi}$ を得る。即ち、一次同次函数 $f(x_1、x_2)$ の生産要素 x_1、x_2 各々の限界生産力は、生産要素の比率にのみ依存して変化する。従って、生産要素が同じ増加率で投入された場合は限界生産力は不変であること、即ち、規模に関して収穫一定である。一般に k 次の同次函数の一階の偏導函数は $k-1$ 次の同次函数となることが証明し得る。従って、一次同次函数の一階の偏導函数は0次同次函数となって、各変数を同じ比率で動かしても値は不変となる

土地面積 L と一般化貸本投入量 C のそれぞれに対応した生産量を P と置き直すと、P は単位土地面積あたりの一般化資本投入量 x に対応した生産量 $F(x)$ に、投入される土地面積 L を乗じた値の $LF(x)$ になるから、⑴より、$P=LF(x)=L(1/z)\phi(z)=L(C/L)\phi(z)=C\phi(z)$ となる。ここで、C を一定として L を変数と考えれば、$L=Cz$ に対して $\partial L=C\partial z$ とできて、かつ、$\partial P=C\partial\phi(z)$ と置けるから、

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial L}=\frac{C\partial\phi(z)}{C\partial z}=\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}=\phi'(z) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

と書ける。次に同様の考え方で今度は L を一定として C を変数と考えれば、$C=Lx$ に対して $\partial C=L\partial x$ とできて、かつ、$P=LF(x)$ より $\partial P=L\partial F(x)$ とできるので、

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial C}=\frac{L\partial F(x)}{L\partial x}=\frac{\partial F(x)}{\partial x}=F'(x) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)'$$

式⑶、⑶' を式⑵に代入して、

$$\frac{\partial\phi(z)}{\partial z}=\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial L}=F(x)-\frac{C}{L}\frac{\partial F(x)}{\partial x}=F(x)-\frac{C}{L}F'(x)=\frac{\mathrm{P}}{L}-\frac{C}{L}\frac{\partial P}{\partial C}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial L}=\frac{\mathrm{P}}{L}-\frac{C}{L}\frac{\partial P}{\partial C} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

式⑷の両辺に L を乗じて整理すると、

$$P=L\frac{\partial P}{\partial L}+C\frac{\partial P}{\partial C} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

を得る。これが、ウィックスティードの完全分配の命題である。

　さて、イタリアにチューリン士官学校の軍事科学教授と、ローマ経済学研究所教授を務めたエンリコ・バローネ（Enrico Barone）（1859～1924年）が居た。彼は、ヴィクセルの1893年の『価値・資本及び地代』についての書評論文、「ヴィクセルの著書について」をジョルナーレ・デリ・エコノミスティ誌に1895年に発表し、並行してウィックスティードの論文を入手したバローネは、ウィックスティードの『分配法則の整合』について、上記の展開についての批判を加えた。

　ウィックスティードの完全分配命題の議論に対して、バローネの批判は手厳しい。バローネは、エッジワースに送ったエコノミック・ジャーナル誌への寄稿文、「ウィックスティードの新著論評」の中で、ウィックスティードの「分配法則の

整合」が二つの点でその主張の効力が傷ものにされていると指摘する。一つはまわりくどい不自然な研究方法[95]、そしていま一つは著者が推論の基礎として勝手な前提を置いているということ、即ち、生産函数の条件として置かれている一次同次性の前提の妥当性に対する疑義である。

ウィックスティードは生産函数の一次同次の前提を明示的に述べてはいないが、しかし例えば前出の図-1における一般化された資本の限界生産力 at を一定にしている点では、暗黙のうちに生産函数の一次同次性が前提されている。バローネは、生産函数の一次同次の前提の恣意性を強く批判した上で、この前提に基づかない方法論に依拠して同様の結論が導き得ることを示した。

バローネは完全競争下での需給均衡状態を出発点とする。ここで、π を価値尺度財で測られた生産物の均衡価格、$p_a, p_b, p_c \cdots$を、同じく価値尺度財で測られた、生産要素 $A, B, C \cdots$の要素価格として、完全競争条件下では必ず下の関係式が得られるとする。

$$\pi P = p_a A + p_b B + p_c C + \cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即ち、この式は価値尺度財で測った生産物の全価値は生産要素間に完全に分配されるという、完全競争を成り立たせる自明な要件を具現しているとバローネは主張する。さらに、あらゆる生産の限界に於いて生産要素 A を ΔA だけ増加させると、それによって生産函数 $P = \varphi(A, B, C \cdots)$ で表される生産物の増加 ΔP が、生産要素 A に対する限界生産力$\partial\varphi/\partial A$に ΔA を乗じた分だけ生じ、この生産物の価値は投入された生産要素の報酬に等しくならなければならない。即ち、

$$\Delta A p_a = \Delta P \pi = \frac{\partial \varphi}{\partial A} \Delta A \pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

式(7)の左辺は、投入された生産要素の増分に対応する価値尺度財で測られた報酬であり、右辺は投入された生産要素の増分によって生じた生産物の増分に対する価値尺度財で測られた価値の増分を意味する。上式(7)を他の生産要素についても同様に適用すれば、

[95] この点については、Stigler も「ウィックスティードは非常に複雑な記号を用い、6ページにもわたる不器用で入り組んだ数学を使っている」と揶揄している（Stigler（1941）松浦（1967）、p. 317）

$$\frac{p_a}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial A},\frac{p_b}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial B},\frac{p_c}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial C}\ \cdots \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

式(6)と、式(8)[96]とから、ウィックスティードが導いた完全分配式と同じものが導出される[97]。即ち、

$$\pi P=\pi\frac{\partial\varphi}{\partial A}A+\pi\frac{\partial\varphi}{\partial B}B+\pi\frac{\partial\varphi}{\partial C}C+\cdots$$

$$\therefore\quad P=\frac{\partial\varphi}{\partial A}A+\frac{\partial\varphi}{\partial B}B+\frac{\partial\varphi}{\partial C}C+\cdots \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

さらにバローネは、ワルラスが要素価格と生産量が与えられた場合に、生産物一単位あたりの生産費、即ち短期の平均費用が極小となる条件をもって生産係数を決定しているが、これは完全競争の結果によって販売価格が短期の平均費用[98]に等しくなることを述べている。また、ワルラスが述べる、全ての要素に報酬を与え尽くした後では利益も受けず、しかし損失も被らないという理念的な企業家は、記号的には式(6)で表現されるとしている[99]。このように、バローネ、ワルラスに於いては、生産函数の一次同次性を前提することなく、完全競争下での企業行動を前提するだけの条件で、ウィックスティードと同等の結論を導出しているのである。

バローネは書評論文、「ウィックスティードの新著論評」をエコノミック・

---

96) 式(8)はまた、企業の利潤極大化を与える際の最適生産要素投入量を与える条件式でもある。即ち、ここに企業の利潤 $r=\varphi\pi-(Ap_a+Bp_b,+Cp_c+\cdots)$ を最大化する生産要素の投入条件は、利潤函数の生産要素に対する一階の条件$\frac{\partial r}{\partial A}=\pi\frac{\partial\varphi}{\partial A}-p_a=0,\ \frac{\partial r}{\partial B}=\pi\frac{\partial\varphi}{\partial B}-p_b=0,\ \frac{\partial r}{\partial C}=\pi\frac{\partial\varphi}{\partial C}-p_c=0,\cdots$ となって、$\frac{p_a}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial A},\frac{p_b}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial B},\frac{p_c}{\pi}=\frac{\partial\varphi}{\partial C},\cdots$式(8)を得る

97) W. Jaffé（安井、福岡）（1977）、pp. 94～100

98) 平均費用曲線がU字を描くとき、短期平均費用が最小となる点で短期限界費用に一致する。即ち、総生産量 y に対応する総費用を $C(y)$ とすると、短期平均費用を最小にする条件は、$\frac{d\left(\frac{C(y)}{y}\right)}{dy}=\frac{C'(y)}{y}+C(y)\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dy}=\frac{C'(y)}{y}-\frac{C(y)}{y^2}=0$ を得て、$C'(y)=\frac{C(y)}{y}$ となって、短期限界費用＝短期平均費用である。また、完全競争下では価格 p に対して企業はこれを所与の要件として行動するが、この時の企業の利潤 $\pi=py-C(y)$ の最大化条件は、$\frac{d\pi}{dy}=p-C'(y)=0$ となって、価格＝短期限界費用となる。（ここでは、利潤函数の二階の条件、$\frac{d^2\pi}{dy^2}<0$ が前提されている）また、短期平均費用が価格を下回っている場合、企業は生産量を増やし、逆の場合は減産に動く。従って短期平均費用と価格が一致する点が操業分岐点、所謂、短期の均衡生産点である。この均衡点に於いて、価格＝短期平均費用＝短期限界費用が成立し、かつこの点で短期平均費用は最小であり、企業の利潤（超過利潤）はゼロである

99) Ibid., p. 99

ジャーナル誌に投稿したが、しかしこの投稿は掲載を拒否された。この掲載拒否の背後には、ワルラスとの関係が冷え込んでいたマーシャルの陰影が見え隠れしていた。同時に、ワルラスはウィックスティードと激しく対立する。1896年にワルラスは『純粋経済学要論』の第三版を公にしているが、そこでの付録Ⅲの中で、ウィックスティードを『要論』の盗作者として激しく非難している。

⑵効用の可測性と積分可能条件

ワルラスはローザンヌ・アカデミーに在籍中、数学者のアントワーヌ・ポール・ピカール（Antoine Paul Picard）（1844～1920年）と、ヘルマン・アムシュタイン（Hermann Amstein）（1840～1922年）の二人と親交を持った。まず、ピカールの助言[100]を得たワルラスは、1873年時点で効用極大化条件下で需要函数を導出するテクニックを会得した[101]。また、1877年1月6日付けでワルラスに宛てられた書簡[102]の中で、アムシュタインは、今日では十分一般的な手法となっているラグランジュの未定乗数法について、これを適用した効用極大化条件下での需要函数の導出手順を提示したが、これはワルラスの理解を超えていた。ワルラスは1876年にヴォー州自然科学学会会報に発表していた覚書では、生産係数を既知の定数として扱っていたが、実際には可変的であり相互に関連し合っているものと認識していた。そこで、ある商品 b に関する n 個の生産係数が連関する函数を、b_i の陰函数の形で

$$F(b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (10)$$

とし、商品 b の生産費を p_b、生産要素１，２，３，…, n の生産要素価格を、$p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots p_n$ とすると

$$p_b = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 + \cdots\cdots + p_n b_n \qquad \cdots\cdots\cdots (11)$$

となって、ワルラスは式⑽の制約条件下で式⑾を最小化する問題の解法についての助言をアムシュタインに求めたのである。今日では自明の解法であるが、アムシュタインはラグランジュ乗数 λ を導入してラグランジュアン、$L = p_b - \lambda F$ を作

[100] W. Jaffé（1965）、Vol.l, pp. 309～311
[101] 福岡（1985）、p. 328
[102] W. Jaffé（1965）、Vol.l, pp. 516～520, Letter NO. 364

り、生産係数 $b_1, b_2, b_3 \cdots\cdots b_n$ 及びラグランジュ乗数 λ による偏微分をゼロとした $n+1$ 本の連立方程式を解くことをワルラスに示唆した。これは次の $n+1$ 個の変数に対応した $n+1$ 本の連立方程式形を示す。

$$\frac{\partial p_b}{\partial b_1}-\lambda\frac{\partial F}{\partial b_1}=0\text{、}\cdots\cdots\cdots\text{、}\frac{\partial p_b}{\partial b_n}-\lambda\frac{\partial F}{\partial b_n}=0\text{、}F=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(12)$$

このように、アムシュタインは、1877年1月6日付けのワルラス宛て書簡の中で、生産函数の制約条件のもとで費用を極小にする条件をラグランジュの未定乗数法を用いて、ほぼ完全に近い限界生産力説を展開していたにもかかわらず、ワルラスはアムシュタインからの書簡内容を公にすることがなく、闇に紛れ込ませてしまった。このラグランジュの未定乗数法を用いた解法についてジャッフェは、おそらく経済学の分野で最初にラグランジュの未定乗数法が適用された事例であり、これはウィックスティードの『分配法則の整合』の公刊に先立つこと17年に及んでいたことを指摘している[103]。

ところで、制約条件付き効用極大化の際には、無差別曲線の原点に対する凸性の条件が必要であるが、これをワルラスに宛てた1888年5月9日の書簡[104]の中で指摘したのがロシア人で、ローザンヌ学派には好意的だったラディスラフ・フォン・ボルトキェヴィッチ（Ladislaus von Bortkiewicz）（1868～1931年）だった。この凸性の条件については、効用最大化の2階微分の十分条件が必要だったが[105][106]、ワルラスが加法的・分離可能型効用函数 $U=U^1(x_1)+U^2(x_2)+\cdots+U^n(x_n)$ を用いており、また全ての財の限界効用逓減を仮定することにより、無差別曲線の原点に対する凸性、即ち凹函数である条件は自動的に充足されていた。しかし、この時期にはすでに加法的効用函数ではない一般形がエッジワースとフィッシャーから提示されており、ワルラスにも周知されていた筈であった。例えば、エッジワース（Francis Ysidro Edgeworth）（1845～1926年）はその著書[107]に於いて、複数の変数に依存する効用函数の一般形 $U=U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$[108]を提示している。これについては、ワルラスはフィッシャーに宛てた1892年7月28日の

---

103) W. Jaffé（安井、福岡）（1977）、p. 138
104) W. Jaffé（1965）、Vol.ll, pp. 248～249, Letter NO. 831
105) 福岡（1985）、p. 332
106) Walras（1926）久武（1983）、pp. 86～88
107) Edgeworth（1881）、p. 26　変数 x, y, z に依存する個人の効用函数 F について、$F(x, y, z)$ とする記述が見られる

書簡[109]の中で、「私は相互に連関を持つ諸商品の効用を研究してまいりました・・・しかし、私はただ話を単純にするために、それらを皆放りっぱなしにしてしまいました」と述べており、単純化の過程に於いて一般的効用函数への考察を放棄してしまっていた。

ところで、マーシャルは効用の可測性について、基数的効用を前提として論じている。即ち、ある財の効用を他の価値尺度財の効用を単位として測定できるとして、例えば酒の効用はビール1単位の効用の何倍かで測定できるとした。この考えの前提には、単位となる財の効用がその摂取量にかかわらず常に一定、即ち、限界効用不変という前提が採用されている。

効用の可測性を巡って、ワルラスはフランス数学者のポール・マテュー・ヘルマン・ロラン（Paul Matthieu Hermann Laurent）（1841～1908年）と、ジュール＝アンリ・ポアンカレ（Jules-Henri Poincaré）（1854～1912年）に助言を求めている。前述のように、経済学に数学的解析手法の導入を試みたワルラスに対して辛辣な批判を浴びせたヘルマン・ロランは、1900年5月13日にワルラスに宛てた書簡[110]の中で、満足というものが測定可能であるという考えは、数学者として断じて受け容れることはできないものという、効用の可測性についての激しい批判を寄せ、ワルラスを動揺させた[111]。効用函数の可測性の扱いについては、ヘルマン・ロランが上の同じ書簡の中で積分可能性条件に言及しつつ、効用函数と需要函数から構成される全微分方程式が積分可能であれば、効用函数の存在が保証されることを以って足れりとするコメントをワルラスに送っていた。

今、n 種類の財に対する需要量 $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ があり、各々の価格を $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ とし、消費者の所得を y とすると、予算制約条件は明らかに

---

108) 一般的な効用函数 $U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が凹函数であること、言い換えれば原点に対して凸であることの条件は、例えば極大値、$x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ とその近傍に位置する点 $a_1^0, a_2^0, \cdots, a_n^0$ を考え、十分小さい $h_i = x_i^0 - a_i^0 > 0$ を考え、効用函数 U が C^2 級であるならば極大値の近傍で2次のテーラー展開を施せて、$U(x_1^0, \cdots, x_n^0) = U(a_1^0, \cdots, a_n^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} h_i + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \Sigma (x_1^0, \cdots, x_n^0) h_i h_j$、但し、極大値の一階の条件より、$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_i} h_i = 0$ であるから、$U(x_1^0, \cdots, x_n^0) - U(a_1^0, \cdots, a_n^0) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} (x_1^0, \cdots, x_n^0) h_i h_j < 0$ となることが極大値の2階の条件である。前提より h_i は正であるから、C^2 級の函数 U の2階の偏微係数行列 $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$、即ちヘッセ行列の行列式の符号が負値定符号をとることが函数 U が凹函数であること、即ち原点に対して凸となるための条件を与える

109) W. Jaffé（1965）、Vol.ll, pp. 498～499, Letter NO. 1064

110) W. Jaffé（1965）、Vol.lll, pp. 116～117, Letter NO. 1452

111) W. Jaffé（安井、福岡）（1977）、p. 63

$$p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3+\cdots+p_nq_n=y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

右辺の y は定数で、左辺を函数 φ と置いて、φ を $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$ で全微分すれば、次を得る。

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}dq_n$$
$$=p_1dq_1+p_2dq_2+p_3dq_3+\cdots+p_ndq_n=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

効用函数 ϕ が存在するためには式(14)に積分因子 μ[112]が乗ぜられたのちに、これが積分可能とならなければならず、言い換えれば、積分因子 μ を乗じた全微分方程式を考えると、

$$d\phi=\mu(p_1dq_1+p_2dq_2+p_3dq_3+\cdots+p_ndq_n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

を得るが、これが次と同値であると考えれば、

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\phi}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\phi}{\partial q_3}dq_3+\cdots+\frac{\partial\phi}{\partial q_n}dq_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

式(15)、(16)の各項を比較して、下記の関係式を得る。

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_1}=\mu p_1,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_2}=\mu p_2,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_3}=\mu p_3,\ \cdots\cdots,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_n}=\mu p_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

この時、上式を満たす函数 ϕ は効用函数と呼ばれ得るということになる。ここで、ロランは上の同じ書簡の中で積分因子 μ の経済学的意味を問うたのだが、それに対するワルラスの回答は1900年５月22日[113]と1900年５月29日[114]のそれぞれ

---

112) ある微分方程式 $\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1+\cdots+\varphi_n(x_1, \mathrm{x}_2, \cdots, x_n)dx_n=0$ が、函数 U の完全微分型である条件、即ち積分可能条件は、この式に函数 $r(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を乗じた全微分方程式が $dU=r(\varphi_1dx_1+\cdots+\varphi_ndx_n)=0$ を満たし、かつ、$\frac{\partial(r\varphi_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial(r\varphi_j)}{\partial x_i}$（$i\neq j$）となる函数 r が存在することである。この時、上のように乗ぜられる函数 $r(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を積分因子と呼ぶ。２変数 x, y の時の微分方程式 $dU=r(x,y)(\varphi_1dx+\varphi_2dy)=0$ が完全微分形になるための積分可能条件は、$\frac{\partial(r\varphi_1)}{\partial y}=\frac{\partial(r\varphi_2)}{\partial x}$ で容易に与えられるが、一般形としての n 変数（$n\geq 3$）の場合の積分可能条件は、解析学ではよく知られているように、$\varphi_i\left(\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi^j}{\partial x_k}\right)+\varphi_j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi^k}{\partial x_i}\right)+\varphi_k\left(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi^i}{\partial x_j}\right)=0\ (i\neq j\neq k)$ によって与えられる（福岡（1980）、pp. 90～91）、（茂木（1970）、pp.. 205～208）、（Samuelson（1950）、p. 380）

113) W. Jaffé（1965）、Vol.lll, pp. 118～120, Letter NO. 1454

114) Ibid., pp. 122～123, Letter NO. 1456

ロラン宛の書簡の中で示され、積分因子が価値尺度財の限界効用そのものであるというものであった。

即ち、n 種類の財の需要量 $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_n$、各々の価格 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ に対する効用函数 ϕ について、今、第一財を価値尺度財とすれば、$p_1 = 1$ とおけて、さらに n 種類の財の選択に於ける効用極大化の条件、則ち、価値尺度財で表現される n 種類の財の限界効用の均等化条件[115)116)]を示せば、

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial q_1}}{1} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial q_2}}{p_2} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial q_3}}{p_3} = \cdots = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial q_3}}{p_3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

となるから、この式の最右辺に共通項として μ を置けば、

$$\frac{\partial\phi}{\partial q_1} = \mu,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_2} = \mu p_2,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_3} = \mu p_3,\ \cdots,\ \frac{\partial\phi}{\partial q_n} = \mu p_n \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

となるので、式(14)が積分可能であるための条件式(15)の $\mu, \mu p_2, \mu p_3, \cdots, \mu p_n$ のそれぞれに、式(19)を代入して、

$$\begin{aligned}
&\mu(p_1dq_1 + p_2dq_2 + p_3dq_3 + \cdots + p_ndq_n)\\
&= \mu dq_1 + \mu p_2dq_2 + \mu p_3dq_3 + \cdots + \mu p_ndq_n\\
&= \frac{\partial\phi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\phi}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\phi}{\partial q_3}dq_3 + \cdots + \frac{\partial\phi}{\partial q_n}dq_n\\
&= d\phi = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)
\end{aligned}$$

となることから、ワルラスが効用極大化条件としての均等化されかつ価値尺度財で表現された限界効用は、実は積分可能性条件の中で提示されていた積分因子 μ

---

115) 所謂、Gossen の第二法則に準ずる

116) 式(15)を q_1, q_2 についてみると、$\frac{\frac{\partial\phi}{dq_1}}{p_1} = \frac{\frac{\partial\phi}{dq_2}}{p_2} = \mu$ は、2財を選択するときの効用極大化条件であるが、均等化された2財の、価値尺度財で測った限界効用 μ は、効用函数の形から独立ではない。一方、上の式はしばしば $\frac{\frac{\partial\phi}{dq_1}}{\frac{\partial\phi}{dq_2}} = \frac{p_1}{p_2}$ の形でも表される。この式の含意は2財の限界効用の比率、即ち2財の限界代替率がその価格比に等しくなるときに、効用を極大化する需要が実現されるというもので、幾何学的には2財の無差別曲線が予算制約線と接した時の接点（q_1, q_2）が最適需要量を与える。この時の最適需要量は効用函数のいかなる変換からも独立である。即ち、最適消費計画に於いて極大化される限界効用は効用函数の変換から独立ではない一方、そのような効用函数から導かれる最適需要量は、効用函数の変換から独立であることが確かめられる

に等しいとしたのである。

ワルラスは1901年９月26日付けポアンカレ宛の書簡[117)]の中で、「私は商品の稀少性[118)]は測定可能ではないが、主要法則の導出の前提として測定可能と考えて良いと主張したところ、ロランによって」上記の激しい批判を受けたことを記している。ロランの立場をもう一歩進めた者に、ローザンヌ学派でパレートの後継者の一人となるパスカル・ボニンセグニ（Pasquale Boninsegni）（1869～1939年）が居る。彼は、1908年９月14日のワルラス宛の書簡[119)]の中で、均衡点に於いて限界効用の比を求めることができても、限界効用そのものの計算は不可能であることを示した。即ち、積分可能性条件が満たされて効用函数の存在が証明される場合には、当該効用函数に何らかの任意の変換を施した函数もまた効用函数としての条件を満たす。従って、効用函数は一意に定まることがなく、一意性が保持され得ない効用函数を定量的に特定することは困難であり、従って効用の測定は不可能と断じたのである[120)]。

このような効用の加測性に関する一連の議論に関連してポアンカレは、1901年９月30日付けのワルラスに宛てられた書簡[121)]の中で、効用を比較可能な概念として捉え、この比較概念を表現する指標的函数が一つ構成されたとして、それに対して単調増加変換を施した函数も同様の比較順序を提示し得ることをボニンセグニと同様に主張した。しかしポアンカレはさらに一歩進んで、このような比較概念を体化した指標函数は恣意性を拒まれることはないが、そこから導出される関係性は指標函数の恣意性から独立でなければならないことを明確に示したのである。つまり、ポアンカレは効用函数の一意性を否定し、恣意性を容認する一方、しかしそこから導き出される結論についてはあらゆる恣意性から独立でなければならないことを述べ、その点に於いて序数的効用の意義を強調したのである。

積分可能性条件とは、繰り返して言えば経験的に特定可能な需要函数から出発して、その背後に存在が予想される効用函数の有無を明らかにするための条件のことである。このような効用函数の存在証明に関わる積分可能性条件については、

---

117) W. Jaffé（1965）、Vol.lll, pp. 161～162, Letter NO. 1495
118) 前述の通り、ワルラスの謂う「稀少性」は限界効用を指している
119) W. Jaffé（1965）、Vol.lll, pp. 375～376, Letter NO. 1706
120) 福岡、丸山（1976）、p. 249
121) W. Jaffé（1977）、Vol.lll、pp. 162～163, Letter NO. 1496

ヴォルテッラもパレートの『経済学提要』書評の中で言及していたが、この問題に対する最初の明晰な言及は、イタリアのジョヴァンニ・バティスタ・アントネッリ（Giovanni Battista Antonelli）（1858～1944年）が1886年に著した『経済学の数学的理論について』[122]の中で、既に与えられていた。しかし、この著作が世に見出されたのはアントネッリの死の前年にあたる1943年だった。そのきっかけは、ウプサラ大学のラディスラス・フォン・ボルトケヴィッチ私文庫で、ヘルマン・ワルト（Herman Ole Andreas Wold）（1908～1992年）が全く偶然にアントネッリが著したパンフレットを発見したことにあった[123]。

シュンペーターは、その著書『経済分析の歴史』の中で３箇所、アントネッリについて言及している。一つ目の箇所ではパンタレオーニについて述べている節でバローネを賞賛しつつ、「（アントネッリ）の驚嘆すべき業績は全く注目を受けるところとはならなかった」[124]と述べ、ここでの注釈で「アントネッリ『経済学の数学的理論について』、私見によれば、この小冊子の論著はいくつかの重要点に於いて将来の研究の先触れとなった」[125]と述べている箇所が二つ目で、三つ目には効用の可測性を論ずる箇所で、基数的効用の扱いについて「当面の理論は厳密な再述を必要としていた。まさにこの点はアントネッリによって成就され、その仕方は後日の業績の多くのものの先駆となった」[126]として、絶賛を惜しまない。

今観察可能な n 個の財の需要函数を、価格 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ の函数として、$x_i = x(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ とすると、需要函数 x_i は零次同次函数として、第 n 財の価格 p_n をニュメレールとして、観察可能な $n-1$ 個の価格比の函数として、

$$(B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}, B_n) = (p_1/p_n, p_2/p_n, \cdots, p_{n-1}/p_n, p_n/p_n)$$

$$= (p_1/p_n, p_2/p_n, \cdots, p_{n-1}/p_n, 1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

と表せて、第 i 財と第 n 財の消費選択に関する消費者均衡条件、即ち、２財の限界代替率と価格比が等しい条件を考慮することで、下記を得る。

$$-\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_n} = B_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

---

122) Antonelli（1886）Chipman（1971）、pp. 333～364
123) Chipman（1971）、p. 321
124) Schumpeter（1954）op.cit., p. 205
125) Schumpeter（1954）東畑、福岡（2005）、p. 206
126) Ibid., p. 571

所得 y に関する予算制約は、

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_{n-1}x_{n-1}+p_nx_n=y \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

と表せて、左辺をある函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ とすれば、$\varphi=y$ であるから、$d\varphi=0$ であり、さらに $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n$ で全微分すると、

$$\begin{aligned} d\varphi &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i \\ &= p_1dx_1+p_2dx_2+\cdots+p_{n-1}dx_{n-1}+p_ndx_n=0 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

第 n 財の価格 p_n をニュメレールとして、上式を書き直して

$$\begin{aligned} &(p_1/p_n)\,dx_1+(p_2/p_n)\,dx_2+\cdots+(p_{n-1}/p_n)\,dx_{n-1}+(p_n/p_n)\,dx_n=0 \\ &\quad=\sum_{i=1}^{n-1}B_i\,dx_i+dx_n=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad dx_n=-\sum_{i=1}^{n-1}B_i\,dx_i \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

として全微分方程式を得る。ここで式(22)を(25)に代入すれば、下記式形は明らかである。

$$dx_n=\frac{\partial x_n}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial x_n}{\partial x_2}dx_2+\cdots\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}dx_{n-1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

ここで任意の零でない函数 Q_n を用いて、比例函数[127] $Q_i=B_iQ_n$ をとり、式(25)に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n}Q_i\,dx_i=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

を得る。但し、式(27)がそのままの形で完全積分可能となることは、稀である。そこで、ここに零でない新たな比例函数 $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を乗じた全微分方程式を考えると

$$\gamma(x_1, \cdots, x_nn)\sum_{i=1}^{n}Q_i\,dx_i=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

ここで $\gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は積分因子であり、ある函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, xn)$ が存在して

[127] Samuelson は、“any set of proportional function”と呼ぶ。(Samuelson (1950)、p. 379) Q_i は式(25)を満足するすべての無差別経路（経路に依らずに積分値が一定となる）に沿って、零でない任意の函数 Q_n に対して比例的挙動を取るものとして仮定される

$$d\phi(x_1, \cdots, x_n) = \gamma(x_1, \cdots, x_n) \sum_{i=1}^{n} Q_i \, dx_i = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

となる時に、改めて式(27)は完全積分可能であると言える。また、式(29)が完全積分可能であると言えるための必要十分条件は、全てが独立ではない $n(n-1)/2$ 本の、次の条件式である。

$$\frac{\partial(\gamma Q_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\gamma Q_j)}{\partial x_i} = 0$$

$$(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} Q_i + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \gamma - \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} Q_j - \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \gamma = 0$$

$$(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

一般に、全微分方程式、$\sum_{i=1}^{n} P_i \, dx_i = 0$ が完全積分可能となるための必要十分条件は、３変数の組み合わせを取り上げた、下式を全て満たすことである[128]。

$$\left\{\begin{array}{l}
P_1\left(\dfrac{\partial P_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial P_3}{\partial x_2}\right) + P_2\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial P_3}{\partial x_1}\right) + P_3\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial P_2}{\partial x_1}\right) = 0 \\[2ex]
P_2\left(\dfrac{\partial P_3}{\partial x_4} - \dfrac{\partial P_4}{\partial x_3}\right) + P_3\left(\dfrac{\partial P_4}{\partial x_2} - \dfrac{\partial P_2}{\partial x_4}\right) + P_4\left(\dfrac{\partial P_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial P_3}{\partial x_2}\right) = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(32) \\[2ex]
P_{n-2}\left(\dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x_n} - \dfrac{\partial P_n}{\partial x_{n-1}}\right) + P_{n-1}\left(\dfrac{\partial P_n}{\partial x_{n-2}} - \dfrac{\partial P_{n-2}}{\partial x_n}\right) + P_n\left(\dfrac{\partial P_{n-2}}{\partial x_{n-1}} - \dfrac{\partial P_{n-1}}{\partial x_{n-2}}\right) = 0
\end{array}\right.$$

この条件を式(29)に適用すべく、任意の３変数 i, j, k（但し、$i \neq j \neq k$）を取り上げて、積分因子 γ とその偏導函数を消去すれば、完全積分可能条件である次式を得る[129]。

$$Q_i\left(\frac{\partial Q_k}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_k}\right) + Q_j\left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial x_i}\right) + Q_k\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial x_j}\right) = 0 \quad (i \neq j \neq k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

ここで、さらに便宜上、$k = n$ と置き、$Q_i = B_i Q_n$ であることを想起するならば、式(33)は

[128] 茂木（1970）、pp. 205〜208

[129] Ibid., p. 205

$$B_i Q_n\left(\frac{\partial(B_n Q_n)}{\partial x_j}-\frac{\partial(B_j Q_n)}{\partial x_n}\right)+B_j Q_n\left(\frac{\partial(B_i Q_n)}{\partial x_n}-\frac{\partial(B_n Q_n)}{\partial x_i}\right)+B_n Q_n\left(\frac{\partial(B_j Q_n)}{\partial x_i}-\frac{\partial(B_i Q_n)}{\partial x_j}\right)$$

$$=B_i Q_n\left(Q_n\frac{\partial B_n}{\partial x_j}+B_n\frac{\partial Q_n}{\partial x_j}-Q_n\frac{\partial B_j}{\partial x_n}-B_j\frac{\partial Q_n}{\partial x_n}\right)+B_j Q_n\left(Q_n\frac{\partial B_i}{\partial x_n}+B_i\frac{\partial Q_n}{\partial x_n}-Q_n\frac{\partial B_n}{\partial x_i}-B_n\frac{\partial Q_n}{\partial x_i}\right)$$

$$+B_n Q_n\left(Q_n\frac{\partial B_j}{\partial x_i}+B_j\frac{\partial Q_n}{\partial x_i}-Q_n\frac{\partial B_i}{\partial x_j}-B_i\frac{\partial Q_n}{\partial x_j}\right)$$

$$=(Q_n)^2\left(B_i\left(\frac{\partial B_n}{\partial x_j}-\frac{\partial B_j}{\partial x_n}\right)+B_j\left(\frac{\partial B_i}{\partial x_n}-\frac{\partial B_n}{\partial x_i}\right)+B_n\left(\frac{\partial B_j}{\partial x_i}-\frac{\partial B_i}{\partial x_j}\right)\right)=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

Q_n は任意の零でない函数だから左辺の括弧の中が零と置けて、かつ $B_n=1$ を考慮して整理すると

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_i}-B_i\frac{\partial B_j}{\partial x_n}=\frac{\partial B_i}{\partial x_j}-B_j\frac{\partial B_i}{\partial x_n}$$

$$(i\neq n\neq j) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

を得る。この式がアントネッリ行列の対称性[130]と呼ばれる条件式であり、式(25)に積分因子を加味した式(29)が成立するための積分可能条件を与えるものである。ここに至って、効用函数の存否に係る議論の一定の到達点を見るわけであるが、さらに一歩進めてアントネッリが言及することのなかった効用函数の擬凹性の確認が必要となってくる。

即ち、上記の積分可能条件のもとで得られるであろう積分関係、即ち効用函数が擬凹性を充足しなければ、当該効用函数の最大化によって需要函数が得られるであろうことが保証されない。即ち、式(22)によって逆需要函数を与える $B_i(x_i,\cdots,x_n)=P_i/P_n$ が連続微分可能であり、かつ、効用函数の擬凹性を保証する条件であるところのアントネッリ行列の対称性及び負値定符号性が満たされるのであれば、逆需要函数 $B_i(x_i,\cdots,x_n)$ を与える効用函数の存在が証明されたこととなる[131]。

6．結び

限界原理は、その登場以前の経済学に対して微積分を主とした強力な解析的分析手法を導入した点に、まさに革命と称されるに相応わしい意義があり、さらに

[130] Antonelli（1886）、pp. 346～347、福岡（1980）、pp. 91～93、Samuelson（1950）、p. 380
[131] 福岡（1980）、pp. 92～95

謂えば消費者行動に於ける効用の極大化と企業の生産活動における利潤極大化といった、経済行動の最適化原理を明晰に分析・提示するためのツールとしての微積分の解析的手法に道を拓いたと謂う点に、限界原理登場の画期的意義が認められる。但し、限界原理を構築し理論彫琢に勤しんだ研究者は、ワルラス、メンガー、ジェヴォンズの三銃士に限定されるものではないことは明らかであり、16世紀のイタリアや18世紀のフランスに於いてその萌芽と、その後の夥しい研究者らの輝かしい学術成果の蓄積を認めることができる。長い歳月を経て恰も腐葉土のように蓄積された学術成果の上に、ワルラス経済学が漸次成熟した数理経済学の果実を実らせていくこととなった。

しかしこの多くの国々で支持者を得たワルラス経済学も、Ｊ．Ｂ．セーの影響力を強く残し自由主義経済学者の牙城と化していた19世紀後半から20世紀前半の母国フランスでの経済学会に受け容れられることはなく、数学の導入そのものが反自由主義とみなされ、「人間の自由は方程式であらわすことはできない」、「数学は道徳科学に於いて存在する摩擦を捨象する」[132]といった類の激しい敵対的拒否反応を前にして、ワルラスは結局、終生フランスでの教授職に就く機会に恵まれることはなかった。同様にフランスの数学界からの拒否反応も凄まじく、それらの論調はすでに見たように心理的要素が支配的である経済学という社会学的領域に、数学的手法を導入することに対する生理的嫌悪感からとも言える反発があった。

ワルラス経済学を受け容れたのは母国フランスではなく、イタリアであったわけであるが、そのイタリアに於いてもワルラスの後継者となったパレートは、効用の可測性問題を巡ってワルラスと袂を分かち、序数的効用を基礎としたエッジワースの無差別曲線、限界代替率を駆使した消費者行動理論彫琢の道へと舵をきっていくこととなった。

『純粋経済学要論』にその頂点を見出すワルラス経済学は、様々にドラマチックな学術的変遷を経て一般均衡理論の金字塔を打ち立て、新古典派経済学の方法論上の枢要を構築することとなったが、20世紀後半からその方法論に由来する方法論的個人主義に対する数多くの批判にも晒されてきた。こうした批判的見地の一端についてはその俯瞰を拙稿に於いても試みている[133]。しかしながら、現代か

[132] 御崎（2006）、p. 130
[133] 櫻田（2018）、pp. 7～10、（2020）pp. 28～30

ら遡ること一世紀半を隔てた時代に構築された数理経済学の手法は今も色褪せることなく、多くの研究者らによって更なる彫琢が進められている。今後の進展を俟ちたい。

参考文献

⑴福岡正夫、「レオン・ワルラス：生誕150年に因んで」、三田学会雑誌、第78巻第４号、pp. 317～349、1985年

⑵福岡正夫、丸山徹、「効用理論史の中のワルラス：『要論』公刊百年を記念して」、三田学会雑誌、第69巻第５号、pp. 231～250、1976年

⑶福岡正夫、『一般均衡理論』、創文社、1980年

⑷安井琢磨、「ワルラス」、『安井琢磨著作集第一巻』、pp. 3～28、創文社、1970年

⑸丸山徹、『ワルラスの肖像』、勁草書房、2009年

⑹丸山徹、「戦間期の数理経済学」、三田学会雑誌、第106巻　第３号、pp. 323～348、2013年

⑺丸山徹、「ダヴァンツァーティの貨幣論」、三田学会雑誌、第102巻　第４号、pp. 681～691、2010年

⑻松浦保、「デ・ピエトリートネッリによる「パレートの経済均衡」の位置づけ」、三田学会雑誌、pp. 190～195、1969年

⑼御崎加代子、「レオン・ワルラス自伝資料」、一橋大学社会科学古典資料センター Study Series、第25巻、pp. 1～32、1991年

⑽御崎加代子、「フランス経済学史－ケネーからワルラスへ－」、昭和堂、2006年

⑾御崎加代子、「ワルラスとイスナール－経済学史における連続と断絶－」、滋賀大学経済学部研究年報、Vol. 16、pp. 101～112、2009年

⑿武藤功、花薗誠編著、『数理経済学の源流と展開』、慶應義塾大学出版会、2015年

⒀武藤功、「ワルラスと「社会数学」の伝統」、三田学会雑誌、第86巻　第２号、pp. 29～64、1993年

⒁武藤功、中野聡子、「ワルラスとオーストリア学派の人々：往復書簡を通じてみた相互関係について」、三田学会雑誌、第84巻　特別号、pp. 111～149、1991年

⒂松浦保、「イタリアにおけるローザンヌ学派経済学：その基本的性格と学史上の位置について」、三田学会雑誌、第61巻　第９号、pp. 929～950、1968年

⒃松浦保、「忘れ去られていた数理経済学者：Giovanni Battista Antonelli」、三田学会雑誌、第70巻　第２号、pp. 156～178、1977年

⒄川俣雅弘、「チュルゴの『価値と貨幣』における価値と価格の理論の公理的分析」、法政大学社会学部・社会志林、第57巻、第３号、pp. 59～89、2010年

⒅川俣雅弘、「経済学史」、培風館、2016年

⒆川俣雅弘、「Ferdinando　Galiani の稀少性価値理論の歴史的位置について」、三田学会雑誌、

第81巻　第２号、pp. 281～299、1988年
⑳黒須純一郎、「ガリヤーニ『貨幣論』の基本構造」、イタリア学会誌、第37巻、pp. 42～56、1987年
㉑茂木勇、『微分方程式』、筑摩書房、1970年
㉒櫻田陽一、「開発経済学の分析フレームワークの学説史的位置付けに係る一考察」、福岡女学院大学紀要、Vol. 4、2018
㉓櫻田陽一、「倫理経済学の学説史的系譜に係る一考察－利己心論の系譜－」、福岡女学院大学紀要、Vol. 6、2020
㉔*Alfred William Flux, "Über Wert, Kapital Und Rente nach den neueren nationalökonomischen Theorien by Knut Wicksell; Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution by P. H. Wicksteed", The Economic Journal, Vol.4, No.14, 1894*
㉕*Antoine Augustin Cournot, "Recherches Sur Les Principes Mathématiques de la Théorie Des Richesses", 1838*（中山伊知郎訳『富の理論の数学的原理に関する研究』、岩波文庫、1936年）
㉖*Carl Menger, "Grundsätze der Volkswirtschaftslehre, Erster, Allgemeiner", Verlag Wilhelm Braumüller, 1871*（安井琢磨、八木紀一郎訳、『国民経済学原理』、日本経済評論社、1999年）
㉗*Evgeny Evgenievich Slutsky, "On the Theory of the Budget of the Consumer", 1915, "Readings in Price Theory", George Allen & Unwin ltd., 1953, Chapter 2, pp.27-56*
㉘*Francis Ysidro Edgeworth, "Mathematical Psychics -An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences-", C. Kegan Paul & CO, 1881*
㉙*George Joseph Stigler, "Production and Distribution Theories", 1941*（松浦保訳、『生産と分配の理論』、東洋経済新報社、1967年）
㉚*George Joseph Stigler, "The Development of Utility Theory l & ll", Journal of Political Economy, Vol.58, No.4 & 5, 1950*
㉛*Giovanni Battista Antonelli, "Sulla Teoria Metematica della Economia Politica (On the Mathematical Theory of Political Economy)", 1886, (John Somerset Chipman et al., "Preferences, Utility, and Demand", Harcourt Brace Jovanovich, Inc., Chap.16, pp.333-364, 1971)"*
㉜*Hermann Heinrich Gossen, "Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fließenden Regeln für menschliches Handeln,*（人間の交換の諸法則並びにこれに基づく人間の取引の諸基準の発展）", 1854（池田幸弘訳、『人間交易論』、日本経済評論社、2002年）
㉝*Johan Gustaf Knut Wicksell, "Über Wert, Kapital Und Rente, nach den neueren nationalökonomischen Theorien", Jena (Verlag von Gustav Fischer), 1893*（北野熊喜男訳、『価値・資本及び地代』、日本経済評論社、2004年
㉞*John Bates Clark, "The Distribution of Wealth, A Theory of Wages, Interest and Profits", Macmillan, 1899*（田中敏弘、本郷亮訳、『富の分配』、日本経済評論社、2007年）
㉟*John Bates Clark, "The Distribution of Wealth, A Theory of Wages, Interest and Profits", 1899, The Online Library of Liberty, A Project of Liberty Fund, 2011*

⑶*John Somerset Chipman, "Introduction to Part ll", "Preferences, Utility, and Demand", Harcourt Brace Jovanovich, Inc., pp.321-331, 1971*
㊲*Joseph Alois Schumpeter, "History of Economic Analysis", Oxford University Press, 1954*（東畑精一、福岡正夫訳、『経済分析の歴史（上）（中）（下）』、岩波書店、2005年
㊳*Marie-Esprit-Léon Walras, "Éléments d'Économie Politique Pure, ou Théorie de la richesse sociale", 1926*（久武雅夫訳、『純粋経済学要論－社会的富の理論－』、岩波書店、1983年）
㊴*Marie-Esprit-Léon Walras, "Théorie mathématique de la richesse sociale, Quatre mémoires lus à l' Academie des sciences morals et politiques à Paris, et à la Société Vaudoise des sciences naturells", 1877*（柏崎利之輔訳、『社会的富の数学的理論』、日本経済評論社、1984年）
㊵*Paul A. Samuelson, "The Problem of Integrability in Utility Theory", Economica, pp.355-385, 1950*
㊶*Philip Henry Wicksteed, "An Essay on the Co-ordination of the Laws of Distribution", McMillan & Co., London, 1894*（川俣雅弘訳、「分配法則の統合」、日本経済評論社、2000年）
㊷*Vito Volterra, "Mathematical Economics and Professor Pareto's New Manual", 1906, "Preferences, Utility, and Demand", Harcourt Brace Jovanovich, Inc., pp.365-369, 1971*
㊸*William Jaffé*（安井琢磨・福岡正夫編訳、『ワルラス経済学の誕生』、日本経済新聞社、1977年）
㊹*William Jaffé, "Correspondence of Leon Walras and Related Papers Vol.l, Vol.ll, Vol.lll", North-Holland Publishing Company, 1965*
㊺*William Stanley Jevons, "The Theory of Political Economy", 1871*（小泉信三、寺尾琢磨、永田清訳、『経済学の理論』、1981年）