消費者選好理論の系譜に係る一考察
－顕示選好理論とその周辺－

櫻田　陽一

福岡女学院大学紀要

国際キャリア学部編抜刷　Vol. 8, 2022

消費者選好理論の系譜に係る一考察

ー顕示選好理論とその周辺ー

櫻田　陽一

A Note on the Genealogy of Consumer's Preference Theory

− Revealed Preference Theory and its Peripherals −

Abstract

In the consumer preference theory, discussions have been made for a long time based on the cardinal utility function theory that presupposes the measurable utility. These arguments can be traced back to Walras, however the utility functions are originally unobservable and difficult to compare and quantify with each other. Starting from this recognition, many researchers have made the ordinal utility function theory, instead of the cardinal utility, the mainstream in the field of consumer selection theory. In this paper, without assuming the existence of a utility function, starting from an observable demand function, the zero-order homogeneity of the demand function, the demand law of price and consumption, and the semi-negative constant sign of the Slutsky alternative matrix are discussed as the major outputs derived from so-called as the revealed preference theory. The light will be shed on the outline of the revealed preference theory, which has succeeded in deriving important laws and characteristics in the field of consumer preference in consumer behavior theory, as well as on its historical significance.

Keywords: Ordinal utility function, Revealed preference theory, Indifferent hyper plane, Integrability

１．顕示選好の理論

顕示選好（*Revealed Preference*）の理論は *P. A. Samuelson* によって1938年に最初に提唱され、その後、*I. M. D. Little*、*H. S. Houthakkeer*、*M. K. Richter*、*A. Mas-Colell*、*D. Gale*、*H. Uzawa*、*L. Hurwicz* らによって彫琢が加えられてきた、消費者選好理論の一分野である。

消費者の需要函数の導出に際しては、二つのアプローチがある。一つは、消費者はある選好基準を持っているものとして、当該選好基準に基づいて最適な消費行動を行なっていると考えるものである。このアプローチの出発点には、消費者の効用函数があり、辿り着くゴールが需要函数である。しかし、消費者の効用函数も選好基準も優れて主観的なものであり、かつ直接観察したり計測することが容易ではない。もう一つのアプローチが、観察可能な市場価格と消費者の選択行動実績を踏まえ、効用函数に比べて推定が容易な需要函数から出発して、消費者の選好関係や無差別曲線、即ち序数的効用函数を導出しようとするものである。この後者が本稿が考察の対象とする顕示選好アプローチである。

ここで、需要函数の導出に際して注意しなければならないことがある。即ち、需要函数は価格体系 p、所得 y と、その下での消費者の消費財に対する需要との間にどのような関係が存在するのかを記述するものである。しかしながら、一般に需要函数が消費者の合理的な行動に基づいて得られるとは限らない。そこで顕示選好アプローチは、どのような条件が満たされていれば当該需要函数が合理的なものであるとの保証が得られるのかという問題に対して、まず答えようとした。顕示選好理論には２財の間の選好を扱った弱い公準と、３財以上の財の間での選好を扱った強い公準の二つがある。まず、弱い公準に沿って、以下に顕示選好理論を概観する。

２．顕示選好の弱い公準

顕示選好理論では、予算制約と価格に直面する消費者が、実際に財の選択を行う場面から考察が開始される。今、２財の消費ベクトル（x_1^j, x_2^j）と、各々の価格ベクトル（p_1^j, p_2^j）を考える。添字の j は、図-１に示されるように、選択パターンとして $j=0$ と $j=1$ の二つを考え、これを各々を区別するための付番に用い

る。この添字の j を用いて、二つの消費パターンと価格ベクトルを考え、各々を (x_1^0, x_2^0)、(x_1^1, x_2^1)、(p_1^0, p_2^0)、(p_1^1, p_2^1) と置く。この時、次の命題が成立し、この命題を顕示選好の弱い公準（*WARP: Weak Axiom of Revealed Preference*）と称する。

【顕示選好の弱い公準（*WARP: Weak Axiom of Revealed Preference*）】
二つの異なる消費パターン (x_1^0, x_2^0)、(x_1^1, x_2^1) の各々が、価格 (p_1^0, p_2^0)、(p_1^1, p_2^1) のもとで最適なパターンであるとする。この時、

$$p_1^0x_1^0 + p_2^0x_2^0 \geq p_1^0x_1^1 + p_2^0x_2^1 \tag{2-1}$$

であるならば、(x_1^0, x_2^0)を購買する予算で(x_1^1, x_2^1)を購買することが可能である。しかしそれにも拘らず(x_1^0, x_2^0)が選択されたとき、$(x_1^0, x_2^0) \circledR (x_1^1, x_2^1)$と書いて、$(x_1^0, x_2^0)$は、$(x_1^1, x_2^1)$よりも顕示的に選好される、という。また、この時、別の価格体系（その価格のもとでは、(x_1^1, x_2^1)が最適消費パターンとして選択し得る）としての(p_1^1, p_2^1)のもとであっても、(x_1^1, x_2^1)が(x_1^0, x_2^0)よりも顕示的に選好されることはない。即ち、$(x_1^0, x_2^0) \not\circledR (x_1^1, x_2^1)$となる。

この弱公準を次の図に即して考察してみよう。消費パターン $x^0(x_1^0, x_2^0)$、$x^1(x_1^1, x_2^1)$ の各々は予算線 A、予算線 B のもとで最適なパターンである。

この二つの消費パターンを、価格体系(p_1^0, p_2^0)に対応する予算線 A に照らして見てみると、x^0は予算線 A 上に位置しているのに対して、x^1は予算線 A の下側に位置している。但し、x^1は予算線 A の上に位置していても、結果は同じである。従って、x^0と x^1は予算線 A で示される予算制約下ではどちらも選択可能であったものの、実際には x^0が選択されたという事実が観測された。この観測結果が示すことは、消費者は x^0の選択が x^1を選択するよりも高い効用を得られると判断したことの顕われであるとみなせるということである。

この結果を踏まえて、予算線 A に対応する価格体系とは異なる価格体系(p_1^1, p_2^1)のもとであっても、x^1が x^0よりも選好される、即ち先の選好が逆転することはないということを、弱公準は主張する。図-1において、価格体系(p_1^1, p_2^1)に対応する予算線 B 上では x^1は最適な消費パターンとなっている。しかし、予算線 B の傾きを維持したまま x^0の位置まで平行移動させた仮想予算線 C では、依然とし

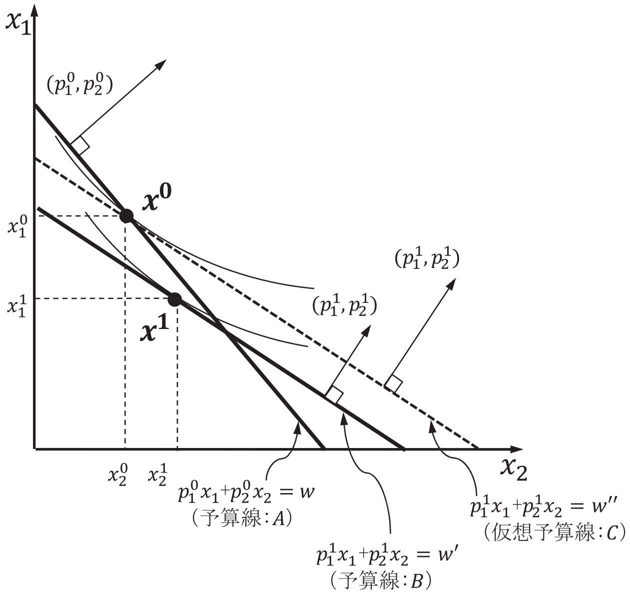
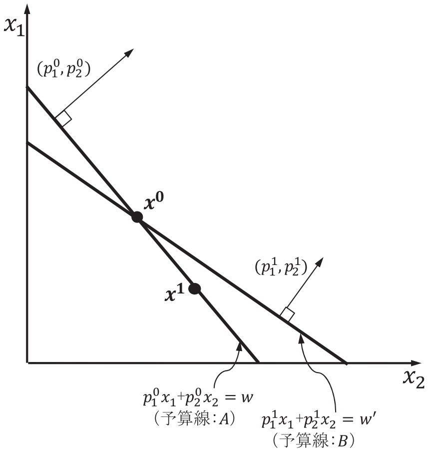


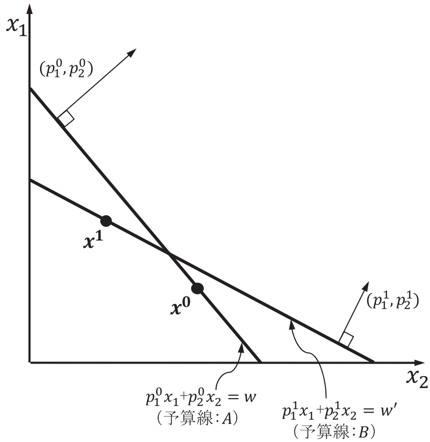
図-１　顕示選好の弱い公準

て x^0 は x^1 の左上に位置している。このことは、予算線 B 上の最適消費点 x^1 を通る無差別曲線が、仮想予算線 C 上での消費点 x^0 を通る無差別曲線の下側に位置することを意味する。次の図-２では消費パターン x^0、x^1 がともに予算線 A 上に位置している。このことは、x^0、x^1 がともに選択が可能であることを示している。このとき x^0 が選好されることが観察されたとして、異なる価格体系からなる予算線 B のもとでも $p^1x^0 > p^1x^1$ となることから、$x^0 > x^1$、即ち x^0 は x^1 に対して顕示的に選好されたと言える。

その一方で、図-３では x^1 は x^0 が位置する予算線 A の左下に位置していることから、依然として x^0 は x^1 に対して顕示的に選好されることが言える。しかし、図-３は顕示選好の弱い公準に矛盾する例となっている。即ち、予算線 A のもとでは x^0 は予算線 A 上に位置しているのに対して、x^1 は予算線 A によって囲まれる予算集合の内部に位置している。従って、ここでも $x^0 > x^1$ となる顕示選好が観測される。しかし、新たな価格体系に対応する予算線 B のもとでは、x^1 と x^0 の位置関係が逆転してしまい、その結果、$x^1 > x^0$ が生じてしまう。このケースは顕示選



図‐２　弱公準を満たす選好



図‐３　弱公準を満たさない選好

好の弱公準に矛盾する選好パターンであり、起こり得ないパターンであるとして排除される。というのも、予算線 A のもとでも予算線 B のもとでも x^1 と x^0 は共に選択可能なパターンであったにも拘らず、予算線 A のもとでは $x^0 > x^1$ が生ずる一方で、予算線 B のもとでは $x^1 > x^0$ が生じてしまうからである。

３．顕示選好の理論と消費者選択行動の定理等

顕示選好の理論からは、幾つかの重要な消費者選択行動の定理等が導かれている。それらは顕示選好理論が世に出る以前は、効用函数や消費者の主観的な消費選好など、観測が困難な前提条件のもとで導出されていたが、顕示選好の理論に於いては価格や消費者の選択行動といった、市場で実際に観測可能な事象から出発するというアプローチがとられた。この時、*Samuelson*（1938）は「効用分析の最後の痕跡をもとどめない（*dropping off the last vestiges of the utility analysis*）消費者行動理論の提案」を目指した。それらは、⑴需要函数のゼロ次同次性、⑵価格と消費の需要法則、⑶スルツキー代替行列の半負値定符号性から成っている。これらの、顕示選好の理論から導かれた幾つかの重要な消費者選択行動の定理等について、以下、順を追って考察を加えていく。

⑴　需要函数のゼロ次同次性

同次性というターミノロジーは、ある函数があったときに当該函数を構成する複数の独立変数が同時に同じ率で変化した時に、当該函数の値が不変であることを意味する。例えば、価格と所得の二つの変数を独立変数に持つ需要函数があるとしよう。この時、価格と所得が同じ率だけ、例えば両者ともに λ 倍になったとしても、需要量は以前と変わらないということを意味する。これを数式で示せば、

$$x(\lambda p, \lambda w) = x(p, w) \tag{3-1}$$

である。需要函数 $x(p, w)$ が顕示選好の弱公準を満たせば、式(3-1)で示されるゼロ次同次性が満たされるということが主張される。ここで、価格 p、所得 w、定数 λ についての二つの需要函数、$x_0 = x(p, w)$、$x_1 = x(\lambda p, \lambda w)$ を考える。この時、$p \cdot x_0 = w$ である。$x_0 = x_1$ となることが、式(3-1)が示す需要函数のゼロ次同次性を意味するのであるが、ここで $x_0 \neq x_1$ としてみる。すると顕示選好の弱公準により、次の関係が成立してしまう。即ち、

$$p \cdot x_0 = p \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad (\lambda p) \cdot x_0 > (\lambda p) \cdot x_1 \tag{3-2}$$

しかし、式(3-2)の左部分の等式に於いては、$w = p \cdot x_0 = p \cdot x_1$ であるので、右の不等式に於いて、$(\lambda p) \cdot x_0 = \lambda(p \cdot x_0) = \lambda w > (\lambda p) \cdot x_1 = \lambda(p \cdot x_1) = \lambda w$ となり、$\lambda w > \lambda w$ という矛盾が生ずる。従って、二つの需要函数は $x_0 = x_1$ を満たすこと、即ち $x(p, w) = x(\lambda p, \lambda w)$ を満たして、ゼロ次同次性が示される。

⑵　価格と消費の需要法則（*Law of Demand*）

需要函数 $x(p, w)$ が、顕示選好の弱公準を満たすものとする。価格 p_0, p_1 のもとで、それぞれ最適化された需要計画を、$x_0 = x(p_0, w_0), x_1 = x(p_1, w_1)$ とする。但し、w_0、w_1 は所得で、$w_0 = p_0 x_0, w_1 = p_1 x_1$ を表すものとする。このとき、

$$p_0 x_0 = p_0 x_1, \quad x_0 \neq x_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 x_0 > p_1 x_1 \tag{3-3}$$

と表せる。ここで、式(3-3)について

$$p_0 x_0 = p_0 x_1 \tag{3-4}$$

$$p_1 x_0 > p_1 x_1$$

(3-5)

として、式(3-5)の両辺から、式(3-4)を各々引いて、移項すると

$$p_1x_0 - p_0x_0 > p_1x_1 - p_0x_1$$

$$(p_1 - p_0)x_0 > (p_1 - p_0)x_1$$

$$\therefore (p_1 - p_0)(x_1 - x_0) < 0$$

(3-6)

式(3-6)を書き換えれば、

$$\Delta p \cdot \Delta x < 0$$

(3-7)

式(3-7)は、価格変化、需要変化各々の符号が逆向きであること、即ち価格上昇即ち需要減、他方、価格の下落即ち需要増という、所謂、価格と消費の需要法則を表している。

(3) スルツキー代替行列の半負値定符号性

顕示選好の弱公準が満たされる需要計画 x_0、x_1と、対応する価格 p_0、p_1について、二つの需要計画が同じ予算線上に乗っているとするとき、

$$p_0x_0 = p_0x_1$$

(3-8)

$$p_1x_0 > p_1x_1 \quad (x_0 \neq x_1)$$

(3-9)

と書ける。このとき、需要計画 x_0、x_1について各々の差を微小量として、

$$x_1 = x_0 + dx$$

(3-10)

と置く。これを式(3-8)に代入すると、次の関係が導かれる。即ち、

$$p_0 \cdot x_0 = p_0 \cdot (x_0 + dx)$$

$$p_0 \cdot x_0 - p_0 \cdot x_0 = p_0 \cdot dx$$

$$\therefore p_0 \cdot dx = 0$$

(3-11)

今、顕示選好の弱公準に従う需要函数 $x(p, w)$ に於いて、変数 p, w について全微分をとると

$$dx = D_p x(p, w)\,dp + D_w x(p, w)\,dw \tag{3-12}$$

また、所得 w は価格 p と需要 x の積として

$$w = p \cdot x(p, w) \tag{3-13}$$

と表せる。式(3-13)に於いて、所得 w の全微分をとると、

$$dw = \frac{\partial\,(p \cdot x\,(p,w))}{\partial p}\,dp + \frac{\partial\,(p \cdot x\,(p,w))}{\partial x}\,dx$$

$$\therefore dw = x \cdot dp + p \cdot dx \tag{3-14}$$

式（3-14）を、$p = p_0$で評価すれば、式(3-11)より、微小な価格変化量として $p \cdot dx = 0$ とできるので、

$$dw = x \cdot dp \tag{3-15}$$

式(3-15)が意味することは、例えば両辺を dp で除して $x = \dfrac{dw}{dp}$と置くと、これは価格が dp だけ変化した後も、需要 x を不変とするために必要な所得の変化量 dw を表しているとも解釈できる。このような所得の変化量は、価格変化後も以前と同じ需要を可能ならしめるための所得補償とみなすことができる。これは即ち、スルツキーの所得補償を意味する。式(3-15)を式(3-12)に代入して、

$$\begin{aligned} dx &= D_p x(p, w)\,dp + D_w x(p, w)\,(x \cdot dp) \\ &= [D_p x(p, w) + x(p, w) \cdot D_w x(p, w)]\,dp \end{aligned} \tag{3-16}$$

需要法則の式(3-7)について、Δp、Δx を微少変化量、dp、dx とすれば、$dp \approx 0$、$dx \approx 0$ を許すこととなり、不等号は等号を含む式に変わって、

$$dp \cdot dx \leq 0 \tag{3-17}$$

式(3-17)に式(3-16)を代入すると、

$$dp \cdot dx = dp \cdot [D_p x(p, w) + x(p, w) \cdot D_w x(p, w)]\,dp \leq 0 \tag{3-18}$$

この時、式(3-18)の［　］内は、スルツキーの代替項に他ならない。従って、

$$S_{ij}(p, w) = D_p x(p, w) + x(p, w) \cdot D_w x(p, w)$$

(3-19)

と置ける。$S_{ij}(p, w)$はよく知られたスルツキーの代替行列である。式(3-18)に式(3-19)を代入し、ベクトル表示に書き直せば、

$$\sum_{i=1}^{n} dp_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} dp_i S_{ij}(p, w) dp_j \leq 0$$

(3-20)

が得られ、価格の微小変化値ベクトルの二次形式が非正となることから、スルツキーの代替行列 $S_{ij}(p, w)$の半負値定符号性が示された。このような性質は、支出函数の凹函数性、即ち無差別曲線の原点に対する凸性を保証する重要な条件ともなっている。

4．無差別曲線の導出

顕示選好の弱い公準を用いた無差別曲線の導出が、*Samuelson*（1947）、*Little*（1949）、*Samuelson*（1948）、そして顕示選好の強い公準と積分可能性を用いた無差別曲線の導出が、*Houthakker*（1950）、*Samuelson*（1950）によって為されている。以下、順を追ってこれらの議論についての系譜を追う。

⑴　オッファー曲線と予算線の包絡線によるアプローチ

Samuelson（1947）は顕示選好の弱公準を用いて、基点に据えられた需要ベクトル x_0よりも効用の高い領域と低い領域とを特定することで、この二つの領域の下方境界線と上方境界線とが一致する線を無差別曲線として導出している。*Samuelson*（1947）の特徴は、まず無差別曲線の存在が最初に前提されており、一連の操作を施すことによって既に存在している無差別曲線を探し出し、その姿を明らかにするというアプローチにある。

顕示選好の弱公準に於いては、価格 p_0のもとで選択された需要ベクトルを x_0とするとき、予算線である p_0x_0上にもうひとつの需要ベクトル x_1を考えると、

$$p_0 x_0 = p_0 x_1$$

(4-1)

が成り立ち、需要ベクトル x_1は選択できたにも関わらず、異なる需要ベクトル x_0が選択された事実を以って x_0は x_1に対して顕示的に選好されたと称される。この

とき、異なる価格p_1のもとであっても、次の関係が成立し、x_0はx_1に対して顕示的に選好される。

$$p_1x_0 > p_1x_1 \tag{4-2}$$

顕示選好の弱公準に基づいて、*Samuelson*（1947）はある需要ベクトルx_0よりも効用の高い領域と低い領域とを特定した。効用の高い領域の特定に際しては需要ベクトルx_0を出発点とするオッファー曲線群とその包絡線を用いており、効用の低い領域の特定に於いては需要ベクトルx_0を通る予算線を回転させながら形成される予算線群とその包絡線を用いて、これら二つの領域の下方境界線と上方境界線を特定している。まず、最初に価格p_0のもとで選択された需要ベクトルx_0を考え、このx_0を通る予算線を回転させ、各々の予算線上での最適消費点を特定する。需要ベクトルx_0を通る価格p_iに対応する予算線上の最適消費点x_iと、元の価格p_0のもとで選択された需要ベクトルx_0との関係はどうなるだろうか。図- 4 に即して考察してみよう。まず図- 4 の左側の図では、元の価格p_0に対して$p_i > p_0$となる価格p_iに対応する予算線上の最適消費点x_iが示されている。価格p_iのもとでは、

$$p_ix_i = p_ix_0 \tag{4-3}$$

であり、かつx_iはx_0の北西に位置している。このとき、p_iと異なる価格であるp_0のもとでのx_iとx_0との選好関係を見てみると、

$$p_0x_i > p_0x_0 \tag{4-4}$$

となっており、従ってx_iはx_0に対して顕示的に選好される、即ち$x_i > x_0$となることがわかる。

　次に図- 4 の右側の図では、元の価格p_0に対して$p_i < p_0$となる価格p_iに対応する予算線上の最適消費点x_iが示されている。価格p_iのもとでは、

$$p_ix_i = p_ix_0 \tag{4-5}$$

であり、かつx_iはx_0の南東に位置している。このとき、p_iと異なる価格であるp_0のもとでのx_iとx_0との選好関係を見てみると、同じように

$$p_0x_i > p_0x_0$$

（4-6）

となっており、従って同じように x_i は x_0に対して顕示的に選好される、即ち $x_i \textcircled{>} x_0$となることがわかる。

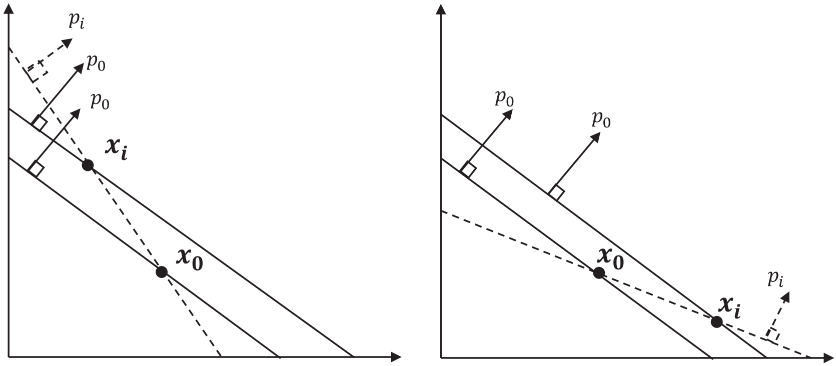


図-4　$x_i \textcircled{>} x_0$となる x_i、x_0の選好関係

次に需要ベクトル x_0を通る予算線を、x_0を基点として連続的に回転させることによって、価格 p_1、……、p_i に対応する予算線上での最適消費点 x_1、……、x_i の軌跡、即ちオッファー曲線を連続的に描くことができる。

オッファー曲線上の全ての需要ベクトルは、明らかに需要ベクトル x_0に対して顕示的に選好される。さらに、オッファー曲線を下方境界線として、それよりも上に位置する全ての消費ベクトルを選択したときの効用は、選好の単調性よりオッファー曲線上の需要ベクトルを選択した際の効用を上回る。従って、需要ベクトル x_0を選択した効用を上回る。即ち、需要ベクトル x_0を通るオッファー曲線は、その上側に位置する効用の高い領域に対する下方境界線となる。ここで *Samuelson*（1947）は、オッファー曲線を下方境界線とする効用の高い領域を如何にして拡大させるかに腐心しつつ、巧妙にこの課題を克服する。

ここで需要ベクトル x_0を通るオッファー曲線上の需要ベクトル x_i に着目し、これを新たな基点として通る予算線を、価格 p_i とは異なる価格 p_j に対応するものとして作図し、新たな予算線上に新たな消費ベクトル x_j をとる。価格 p_j のもとでは、

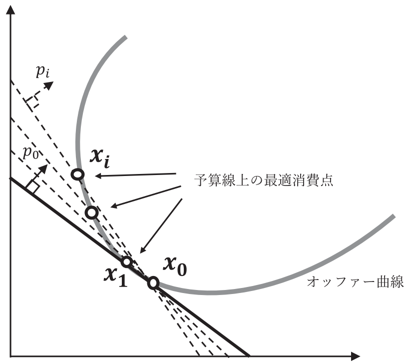


図-５　需要ベクトル x_0を通る予算線とオッファー曲線

$$p_j x_j = p_j x_i \tag{4-7}$$

であり、x_j は x_i に対して顕示的に選好される。同様にして需要ベクトル x_i を通って、価格 p_j に対応する予算線を連続的に回転させながら、それら予算線上での最適消費点の軌跡をとれば、需要ベクトル x_i を通る新たなオッファー曲線が得られる。このような操作を x_i、x_j、…について行うことで、複数のオッファー曲線群を得ることができるが、これら複数のオッファー曲線上の需要ベクトル、及

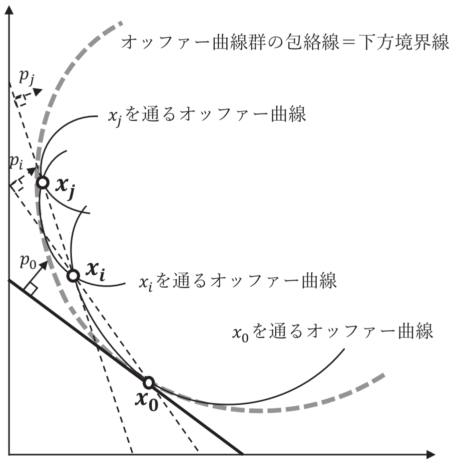


図-６　オッファー曲線群と下方境界線

び選好の単調性より曲線の上側の領域群に於ける全ての需要ベクトルの選好は、x_0よりも高い効用を得る。このようなオッファー曲線群の包絡線が需要ベクトルx_0よりも高い効用を与える領域の下方境界線となる。

続いて、ある需要ベクトルx_0よりも効用の低い領域とその上方境界線について見ていく。最初に価格p_0のもとで選択された需要ベクトルx_0を考え、このx_0を通る予算線上にもうひとつの需要ベクトルx_iをとる。さらに需要ベクトルx_iを通って価格p_iに対応する予算線を引いて、需要ベクトルx_iはこの新しい予算線上で最適な消費点と考える。このとき需要ベクトルx_0とx_iとの関係を、図-7に即して考察してみよう。まず、図-7の左側の図では、元の価格p_0に対して$p_i > p_0$となる価格p_iに対応する予算線上の最適消費点x_iが示されている。但し価格p_0のもとで、

$$p_0 x_i = p_0 x_0 \tag{4-8}$$

であり、かつx_iはx_0の北西に位置している。このとき、p_0と異なる価格であるp_iのもとでのx_iとx_0との選好関係を見てみると、

$$p_i x_i < p_i x_0 \tag{4-9}$$

となっており、従ってx_iはx_0に対して顕示的に選好されない、即ち$x_i \textcircled{\not\succ} x_0$と言える。

次に図-7の右側の図では、元の価格p_0に対して$p_i < p_0$となる価格p_iに対応する予算線上の最適消費点x_iが示されている。価格p_0のもとでは、

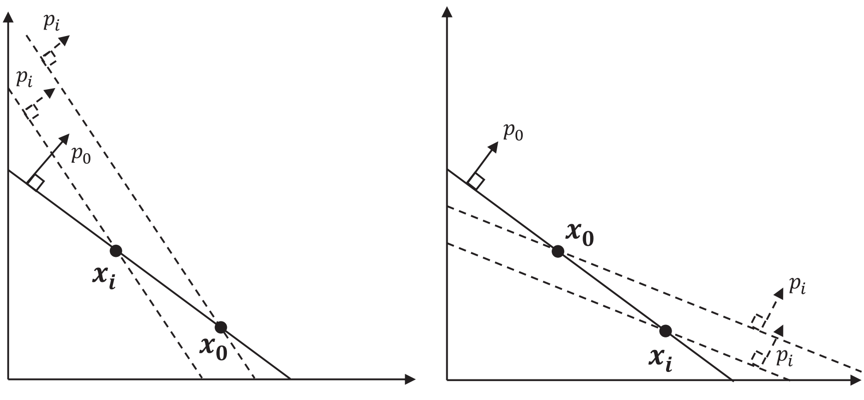


図-7　$x_i \textcircled{\not\succ} x_0$となる$x_i$、$x_0$の選好関係

$$p_0 x_i = p_0 x_0 \tag{4-10}$$

であり、かつ x_i は x_0の南東に位置している。このとき、p_0と異なる価格である p_i のもとでの x_i と x_0との選好関係を見てみると、同じように

$$p_i x_i < p_i x_0 \tag{4-11}$$

となって、x_i は x_0に対して同じように顕示的に選好されない、即ち $x_i \not\succsim x_0$と言える。

次に需要ベクトル x_0を通る予算線上にとった新たな需要ベクトル x_i、これは、需要ベクトル x_0の北西に位置し、x_0を選好したときの効用水準を下回るものであるが、この点を通る、$p_i > p_0$となる新たな価格 p_i に対応する予算線を引き、その上に更に新たな需要ベクトル x_j をとると、このようにしてプロットされていく需要ベクトルは全て需要ベクトル x_0を選好したときの効用水準を下回る。同じく、需要ベクトル x_0を通る予算線上にとった新たな需要ベクトル x_i'、これは、需要ベクトル x_0の南東に位置し、x_0を選好したときの効用水準を下回るのであるが、この点を通る、$p_i' < p_0$となる新たな価格 p_i'に対応する予算線を引き、その上に更に新たな需要ベクトル x_j'をとると、このようにしてプロットされていく需要ベクトルは全て需要ベクトル x_0を選好したときの効用水準を下回る。このようにして

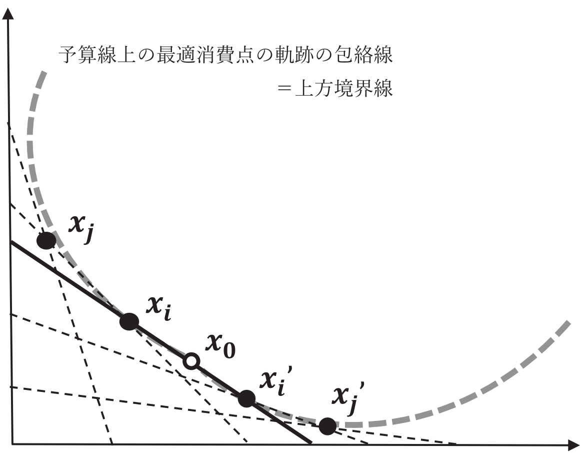


図- 8　予算線群の回転による上方境界線の導出

需要ベクトル x_0を出発点として、予算線を回転させて得られる需要ベクトルの連鎖、x_i、x_j、……及び、x_i'、x_j'、……は全て需要ベクトル x_0を選好したときの効用水準を下回る。更に、選好の単調性よりこれら需要ベクトルの連鎖の下側の領域に属する全ての需要ベクトルもまた、需要ベクトル x_0を選好したときの効用水準を下回る。このような予算線群の包絡線が需要ベクトル x_0よりも低い効用を与える領域の上方境界線であり、図-８に示される。

上記のオッファー曲線群と予算線群の作図を極限まで押し進めていくことで、上方境界線と下方境界線とが一致を見るところとなり、それが需要ベクトル x_0を通る無差別曲線であることを *Samuelson*（1947）は主張する。これが、顕示選好の弱公準を応用した指数理論（*the Economic Theory of Index Numbers*）と称される。

⑵　行動線とコーシー・リプシッツ近似（*Cauchy-Lipscitz Approximation*）

上記の *Samuelson*(1947)の方法を踏襲しながらも、しかし、*Samuelson*(1947)が前提として置いた無差別曲線の存在、即ち、序数的効用函数の存在を前提に置かず、顕示選好の弱公準のみを用いて x_i が x_0よりも選ばれるという関係性のみ、即ち需要函数のみを用いて、その推移性から *Samuelson*（1947）が導いたものと同様の上方境界線と下方境界線を得たのが、*I.M. D. Little*（1949）である。*Little*（1949）は上のようにして導いた上方境界線と下方境界線が極限で一致する曲線を、無差別曲線とは呼ばず、行動線（*behavior line*）と呼んだ。*Little*（1949）の業績の意義は、*Samuelson*（1947）がその存在を予め前提として置いた無差別曲線の概念を一切用いず、顕示選好の弱公準を適用して需要函数のみから行動線を導いた点にある。

さらに *Samuelson*（1948）は、上の *Little*（1949）の方法に数学的基礎を与えた[1)]。ここで、*Samuelson*（1948）が展開した方法論について見ていくことにしよう。*Samuelson*（1948）は２財モデルを用いて、需要函数 x_1、x_2と価格 p_1、p_2とについて、価格比 p_1/p_2を従属変数とし、需要函数 x_1、x_2を独立変数に置いた所謂逆需要函数、$p_1/p_2=f(x_1, x_2)$を定義する。ここで、函数 $f(x_1, x_2)$は観察可能で連続であり、かつ２財の需要函数 x_1、x_2の各々によって偏微分可能であると前提

---

1) *Samuelson*（1948）と *Little*（1949）の各々の論文の刊行年次を見ると、*Samuelson* の方が *Little* に先んじているように見えるが、これは論文の刊行年次の順序のみの問題である

される。

ここで、縦軸に x_2、横軸に x_1をとった2財 x_1、x_2平面を考え、この平面上に選好される需要ベクトル $A(x_1, x_2)$を、価格比 p_1/p_2に対応する予算線上で選好された最適消費点とみなす。

この時、需要ベクトル $A(x_1, x_2)$は需要の価格弾力性が1である（*unitary elasticity*）と仮定すれば、点 A に於いて $p_1/p_2 = x_2/x_1$が成り立つ。同時に、点 A に於ける最適消費条件（2財 x_1, x_2の価格比と負の限界代替率との等号条件）であるところの $p_1/p_2 = -\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$が満たされて、

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -f(x_1, x_2) = -\frac{p_1}{p_2} = -\frac{x_2}{x_1} \tag{4-12}$$

となって、2財 x_1、x_2の微小変化率 dx_2/dx_1は上記の(4-12)で示される極めて単純な微分方程式を満たすことになる。さらに、顕示選好の弱公準を適用することで、上に示した予算線上の需要ベクトル及び予算線の下側に位置する需要ベクトルは、全て需要ベクトル A を選好したときの効用水準を下回るとみなし得る。

ここで、上に示されるような一階常微分方程式(*first-order ordinary differential equations*）について考察する。2財 x_1、x_2平面上のある点 $A(x_1, x_2)$を通り、傾き $f(x_1, x_2) = -x_2/x_1$である直線を引くと、この直線は点 A を通る一階常微分方程式（4-12）の解曲線の接線となる。A を通り傾き $f(x_1, x_2)$の直線上に A を含む短い線分を考えると、これは A に対する方向場（*direction field*）と呼ばれる。即ち、方向場は常微分方程式（4-12）の解曲線上の（x_1, x_2）に於ける接線を微小線分で表現したものである。そこで、ある初期条件、$x_{20} = x_2(x_{10})$を満たす一階常微分方程式（4-12）の解を求めるということは、初期条件を満たす点 $A_0(x_{10}, x_{20})$を通る曲線で、当該曲線上の各点で方向場を接線として持つ曲線を求めることになる。

例えば、初期条件を満たす点 $A_0(x_{10}, x_{20})$を通り、傾きが $f(x_{10}, x_{20}) = -x_{20}/x_{10}$であるような直線は、点 A_0の方向場を伸ばした直線となって

$$x_2 - x_{20} = f(x_{10}, x_{20}) \cdot (x_1 - x_{10}) = (-x_{20}/x_{10}) \cdot (x_1 - x_{10}) \tag{4-13}$$

と書ける。この直線上に、点 A_0に十分近い点 $A_1(x_{11}, x_{21})$をとる。このとき、x_{10}と x_{11}との間の距離を微小な長さ h として $x_{11} = x_{10} + h$ とすると、h が十分に小さいときにはテーラー展開の一次近似式が適用できるので、点 $A_1(x_{11}, x_{21})$は、

$$x_{11} = x_{10} + h$$
$$x_{21} \approx x_{20} + f(x_{10}, x_{20})h = x_{02} + \left(-\frac{x_{20}}{x_{10}}\right)h \tag{4-14}$$

と求められる。このような操作を順次繰り返していくことによって、初期値点である A_0を通って A_1、A_2、A_3、……を繋ぐ一階常微分方程式（4 -12）の解曲線の折れ線近似が得られる。この折れ線近似を、*Samuelson*（1948）は上に示した *Cauchy*・*Lipscitz* 近似の手法を適用し、実際の数値例とともに導出している。さらに *Samuelson*（1948）はこの折れ線近似の手法に顕示選好の弱公準を応用して、初期値点 A_0に対してこの点よりも顕示的に選好されない消費点の軌跡をプロットしながら解曲線に迫っていくアプローチを、下から（*from below*）の近似と称し、他方、初期値点 A_0に対してこの点よりも顕示的に選好される消費点の軌跡をプロットしながら解曲線に迫っていくアプローチを、上から（*from above*）の近似と称している。ここで、*Samuelson*（1948）が示した下からの近似を図示したものを、図- 9 に示す。

図- 9 に書かれた波線の曲線は、点 $A_0(x_{10}, x_{20})$を初期値点に持つ常微分方程式（4-12）の解曲線であり、*Samuelson*（1948）はこれを *Little*（1949）の行動線と称している。図- 9 は下からの折れ線近似を示したものであり、折れ線 L_1は点

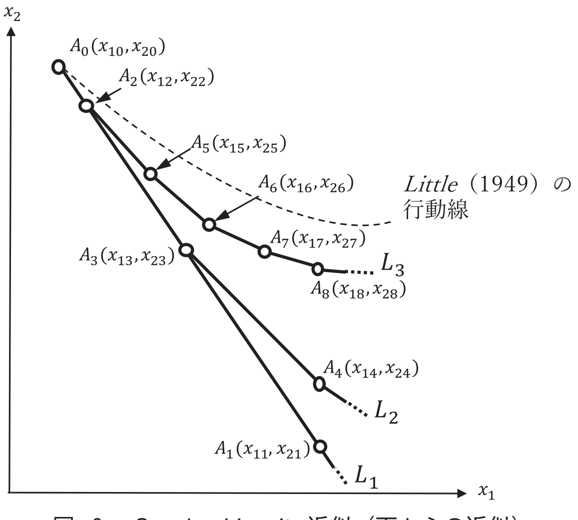


図- 9　*Cauchy*・*Lipscitz* 近似（下からの近似）

A_0と A_1の２点から成る最も粗い近似曲線である。次いで折れ線 L_2は点 A_0と A_3、A_4の３点から成る近似曲線、そして、折れ線 L_3は点 A_0と A_2、A_5、A_6、A_7、A_8の６点から成る近似曲線と、徐々に近似の精度が上がっていく形になっている。A_0、A_1、……、A_8の各点では、微分方程式（４-12）の関係が満たされており、従ってその近似式（４-14）の関係が満たされている。今、折れ線 L_1について見れば、初期値点 $A_0(x_{01}, x_{02})$に対して、$A_1(x_{11}, x_{21})$では、式（4-14）より、

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{10} + h \\ x_{21} &= x_{20} + \left(-\frac{x_{20}}{x_{10}}\right)h \end{aligned} \tag{4-15}$$

となって、A_1が求まる。ここで、h をさらに細かくとっていくことで折れ線 L_2、L_3が得られるが、式（4-15）に示されるように漸化式のように A_0、……、A_8の座標点を順次代入していくことで、近似曲線上の点が定められていく。繰り返しになるが、これら下からの折れ線近似曲線上の各点は顕示選好の弱公準によって、初期値点 A_0に対して顕示的に選好されない点の軌跡となっている。全く同じ要領で、*Samuelson*（1948）は上からの近似という形で解曲線の折れ線近似を導出しており、この近似曲線上の各点は初期値点 A_0に対して顕示的に選好される点の軌跡となっている。その上で、*Samuelson*（1948）はこの二つの曲線は h を究極のゼロに近づけていくことで双方が一致することを主張する。そもそも微分方程式（４-12）の解曲線は、*Cauchy*・*Lipscitz* 条件によって一意に定まることが証明されるわけであり、この一意の解曲線に向かって上からと下からの折れ線近似曲線が収束していく。さらに顕示選好の弱公準より収束する解曲線上の選択消費点は、A_0に対して顕示的に選好されかつ顕示的に選好されない点となるのであるが、そうなるとこの解曲線上の選択消費点は、A_0に対して選好の効用が高いのか低いのかが必ずしも自明ではない。しかし、敢えて言うのであるならばこれらの選択消費点は A_0に対して無差別であると言えるものであるのかも知れないと、*Samuelson*（1948）は慎重な表現で締め括っている。

Samuelson（1947）から *Little*（1949）、*Samuelson*（1948）へと連なる無差別曲線導出に係る議論は、しかし未だ２財の場合に止まっている。３財以上の選好理論に発展させるためには、積分可能性問題を扱わなければならず、顕示選好の

[2] *Samuelson*（1948）は *Conclusion* の脚注の中で、“In the multidimensional case, there still remain some problems, awaiting a solution for more than a decade now”と述べている

弱公準を超える議論が必要となってくる[2)]。この問題に取り組んだのが、次に考察を加える *Houthakker*（1950）と *Samuelson*（1950）の顕示選好の強い公準の議論である。

5．顕示選好の強い公準と積分可能性問題

顕示選好の弱い公準を用いた無差別曲線の導出に係る考察が、*Samuelson*（1947)、*Little*（1949)、*Samuelson*（1948）に於いて展開されたわけであるが、それらはいずれも２財の場合に議論が限定されていた。これらを踏まえて、n 種類の財（$n \geq 3$）の選好という一般論に拡張した無差別曲面の導出へと、議論を拡大させたのが、*Houthakker*（1950）及び *Samuelson*（1950）である。以下、順を追ってこれらの議論についての系譜を追う。

⑴ *Houthakker*（1950）による高位所得線と低位所得線の特定

Houthakker（1950）は、価格変化に対応して変化する消費者の選択消費点を追跡し、その軌跡に対して顕示的に選好される場合と、されない場合とを峻別しながら、極限に於いては両者が一意に一致するという、*Samuelson*（1947）の方法を踏襲しながらも、n 種類の財（$n \geq 3$）の選好という一般的選好を対象として、顕示選好の弱い公準に対して選好の推移性を明示的に内包させた、顕示選好の強い公準の導出に成功した。以下、*Houthakker*（1950）の議論を追うことで、その内容と意義を明らかにしていく。

まず *Houthakker*（1950）は、議論の出発点として価格体系 P^0を置く。この下である消費者によって購入され、基点となる財の組 X^0と、X^0が購入されなかった価格体系 P^1がとられる。この場合、P^0、P^1、X^0はいずれも n 種類の財に対応するベクトルとなっている。即ち、*Houthakker*（1950）に於いては、

$$P^i = \{p^i_1, p^i_2, \cdots, p^i_n\}$$
$$X^i = \{x^i_1, x^i_2, \cdots, x^i_n\} \tag{5-1}$$

と表現されており、従って P^i と X^i の積は、

$$P^i X^i = \sum_j p^i_j x^i_j \tag{5-2}$$

と置かれている点に、注意が必要である。

さて、この P^1 と所得水準 P^1X^0 のもとで選択消費される財の組が X^{11} と定義され、かつ、$P^1X^0=P^1X^{11}$ だから X^{11} は X^0 に対して顕示的に選好されると言える。この後、価格体系 P^0 と P^1 の間で中間の価格体系が考えられていき、それぞれの価格体系のもとで選択消費される財の組が連続的に特定されていき、各々が自分よりも前に特定された選択消費財の組に対して顕示的に選好されることが主張されることによって、基点となる財の組 X^0 から始まって順次顕示的に選好されていく選択消費財の組の軌跡が特定されていく。この流れを、*Houthakker*（1950）は２次元のケースについて図示しており、そのエッセンスを示せば図-10の通りである。図-10は一例として、価格体系 P^0 と P^1 の間で中間の価格体系として $P^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}P^0+\frac{1}{2}P^1$、$P^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}P^0+\frac{1}{2}P^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}P^0+\frac{1}{4}P^1$ の２つをとったものを図示している。座標軸には x_1 と x_2 がとられ、基点となる選択消費点 X^0 を通る初期の価格体系 P^0 の傾きをもつ予算線が引かれている。一点鎖線で示された曲線、l_1、$l_{\frac{1}{2}}$、$l_{\frac{1}{4}}$ はそれぞれ、価格を P^1、$P^{\frac{1}{2}}$、$P^{\frac{1}{4}}$ で固定した上で所得を変化させ、その変化に応じた最適選択消費点の軌跡を描いた、所得消費曲線である。

X^0 から始まり、中間価格を動かしていくことで変化していく選択消費点、X^{14}、X^{12}、X^{11} を結んで得られる折れ線は、中間価格である $P^{\frac{K}{S}}$ を細かくとっていくことで、ある極限曲線に収束していく。このとき、中間価格 $P^{\frac{K}{S}}$ は次に示されるように、二つの価格 P^0 と P^1 の凸一次結合として表される。

$$P^{\frac{K}{S}}=\frac{S-K}{S}P^0+\frac{K}{S}P^1$$

（但し、$0<K\leq S$）

（5-3）

図-10で、まず X^0 を基点として価格 $P^{\frac{1}{4}}$ のもとでの予算線を引く。当該予算線と、価格を $P^{\frac{1}{4}}$ に固定した上で所得を変化させたときに得られる最適消費点の軌跡 $l_{\frac{1}{4}}$ との交点を X^{14} と置く。このとき、X^{14} は価格 $P^{\frac{1}{4}}$、所得 $P^{\frac{1}{4}}X^0=P^{\frac{1}{4}}X^{14}$ のもとで選択され、X^0 を選択したときの効用と同等か、もしくは X^0 に対して顕示的に選好される。次に、X^{14} を新たな基点として、X^{14} を通って価格 $P^{\frac{1}{2}}$ のもとでの予算線を新たに引き、価格を $P^{\frac{1}{2}}$ に固定し所得を変化させたときの最適消費点の軌跡である $l_{\frac{1}{2}}$ との交点を X^{12} とすると、X^{12} は X^{14} と同等もしくは顕示的に選好される。このような操作を繰り返していき、中間の価格 $P^{\frac{K}{S}}$ を細かくとっていくこと

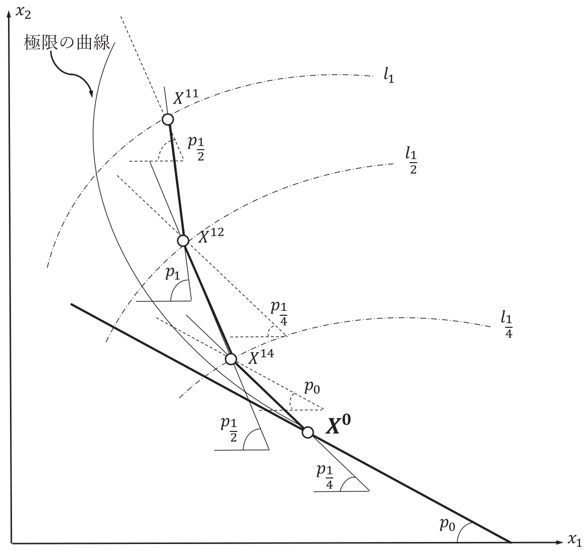


図-10　基点 X^0に対して顕示的に選好される選択消費点 X の軌跡

で図-10の折れ線曲線はある極限の曲線に収斂していく。かつ、この極限曲線上の点、及び曲線の上側の領域に含まれる全ての選択消費点は、X^0に対して顕示的に選好される。これらは下記のように表される。

・X^0と X^{14} ：　$p_{\frac{1}{4}}X^0 = p_{\frac{1}{4}}X^{14}$,　$p_0X^0 < p_0X^{14}$,　　$\therefore X^0 < X^{14}$

・X^{14}と X^{12}：　$p_{\frac{1}{2}}X^{14} = p_{\frac{1}{2}}X^{12}$,　$p_{\frac{1}{4}}X^{14} < p_{\frac{1}{4}}X^{12}$,　　$\therefore X^{14} < X^{12}$

・X^{12}と X^{11}：　$p_1X^{12} = p_1X^{11}$,　$p_{\frac{1}{2}}X^{12} < p_{\frac{1}{2}}X^{11}$,　　$\therefore X^{12} < X^{11}$

(5-4)

このようにして得られる$P^{\frac{K}{S}}X^{KS}$を、*Houthakker*（1950）は高位所得連鎖（*Superior Income-sequence*）と呼ぶ。

さらに *Houthakker*（1950）は、同じようにして X^0に対して顕示的に選好されない選択消費の点列を導出している。そのエッセンスを図-11に示す。

図-10と同じような手続きを、図-11に於いても進めるべく、まず X^0を通り価格 P^0のもとでの予算線と、価格を$P^{\frac{1}{4}}$に固定した上で所得を変化させたときに得られる最適消費点の軌跡$l_{\frac{1}{4}}$との交点を X^{-14}と置く。X^{-14}は価格$P^{\frac{1}{4}}$のもとで、しかし所得は $P^0X^0 = P^0X^{-14}$のもとで選択される選択消費点であり、X^0を選択した

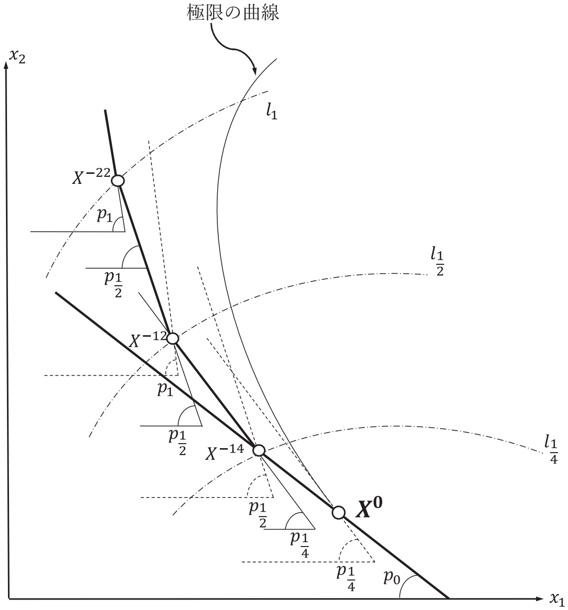


図-11　基点 X^0 に対して顕示的に選好されない選択消費点 X の軌跡

ときの効用と同等か、もしくは X^0 に対して顕示的に選好されない点である。次に、X^{-14} を新たな基点として、X^{-14} を通って価格 $P^{\frac{1}{4}}$ のもとでの予算線を新たに引き、価格を $P^{\frac{1}{2}}$ に固定し所得を変化させたときの最適消費点の軌跡である $l_{\frac{1}{2}}$ との交点を X^{-12} とすると、X^{-12} は価格 $P^{\frac{1}{2}}$ のもとで、しかし所得は $P^{\frac{1}{4}}X^{-14}=P^{\frac{1}{4}}X^{-12}$ のもとで選択される選択消費点であり、X^{-12} は X^{-14} と同等もしくは顕示的に選好されない消費点である。このような操作を繰り返していき、中間の価格 $P^{\frac{K}{S}}$ を細かくとっていくことで図-11の折れ線曲線はある極限の曲線に収斂していく。かつ、この極限曲線上の点、及び曲線の下側の領域に含まれる全ての選択消費点は、X^0 に対して顕示的に選好されない。これらを数式で表現すれば、下記のように表される。

・X^0 と X^{-14} ：　$p_0X^{-14}=p_0X^0,\ p_{\frac{1}{4}}X^{-14}<p_{\frac{1}{4}}X^0,\qquad \therefore X^{-14} \not\succ X^0$

・X^{-14} と X^{-12} ：　$p_{\frac{1}{4}}X^{-12}=p_{\frac{1}{4}}X^{-14},\ p_{\frac{1}{2}}X^{-12}<p_{\frac{1}{2}}X^{-14},\qquad \therefore X^{-12} \not\succ X^{-14}$

・X^{-12} と X^{-22} ：　$p_{\frac{1}{2}}X^{-22}=p_{\frac{1}{2}}X^{-12},\ p_1X^{-22}<p_1X^{-12},\qquad \therefore X^{-22} \not\succ X^{-12}$

(5-5)

　このようにして得られる$P^{\frac{K}{S}}X^{KS}$を、*Houthakker*（1950）は低位所得連鎖（*Inferior Income-sequence*）と呼ぶ。次いで、*Houthakker*（1950）は二つの価格体系P^0、P^1の間の中間の価格体系を連続的にとっていくことで、高位所得連鎖と定位所得連鎖とが一義的に定まる同一の曲線に収斂することを論ずる。

　今、任意の価格体系P^aを考え、これを不変に保たれるものとする。次にP^aに隣接する価格との間に定められる中間価格体系P^bをとる。このとき、高位所得連鎖については定義により、

$$P^bX^b = P^b\,X^a \tag{5-6}$$

である。（式（5-4）を見よ。）今、高位所得連鎖に位置する二つの所得差をΔMとすると、

$$\Delta M = P^bX^b - P^aX^a \tag{5-7}$$

式（5-7）は、式（5-6）より、

$$\Delta M = P^bX^a - P^aX^a \tag{5-8}$$

とも書けるため、

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^a \Delta p_i$$

（但し、$X^a = \{x_1^a, \cdots, x_{n-1}^a\}$、$\Delta p_i = p_i^b - p_i^a$）
（5-9）

と書くことができる。なお、式（5-9）に於いて添字のiが1から$n-1$までの表記になっているのは、n番目の財の価格を1としてニュメレールにとっており、$\Delta p_n = p_n^b - p_n^a = 0$としていることに依る。このとき、中間の価格体系$P^b$が限りなく$P^a$に近づいていくと考えると、式（5-9）の$\Delta$表示は、$d$表示に変わって、

$$dM = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^a dp_i \tag{5-10}$$

と表される。

　他方、低位所得連鎖についてはその定義により、

$$P^aX^{-b} = P^aX^{-a}$$

(5-11)

である。（式（5-5）を見よ。）今、低位所得連鎖に位置する二つの所得差を ΔM^- とすると、

$$\Delta M^- = P^b X^{-b} - P^a X^{-a}$$

(5-12)

式（5-12）は、式（5-11）より、

$$\Delta M^- = P^b X^{-b} - P^a X^{-b}$$

(5-13)

とも書けるため、

$$\Delta M^- = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{-b} \Delta p_i$$

$$（但し、X^{-b} = \{x_1^{-b}, \cdots, x_{n-1}^{-b}\}、\Delta p_i = p_i^b - p_i^a）$$

(5-14)

式（5-14）はさらに、

$$\Delta M^- = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{-b} \Delta p_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{-a} \Delta p_i - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta x_i \Delta p_i$$

$$（但し、\Delta x_i = x_i^{-a} - x_i^{-b}）$$

(5-15)

と書ける。このとき、中間の価格体系 P^b が限りなく P^a に近づいていくと考えると、極限に於いては式（5-15）のところで、右辺の第二項 $\Delta x_i \Delta p_i$ は無視し得るほどに十分小さな値をとると見ることができるため、式（5-15）は、

$$dM^- = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{-a} dp_i$$

(5-16)

と表される。ここで高位所得連鎖、低位所得連鎖の各々に係る二本の式（5-10）、（5-16）に注意すると、双方ともに下記に示される同じ微分方程式を満たすことが言える。

$$dM - \sum_{i=1}^{n-1} x_i dp_i = 0$$

(5-17)

ここで価格 p_i は中間価格体系の形をとるから、ある種の連鎖の制約のもとに置かれている。この価格連鎖を表現するため、価格 p_i がパラメータ t の函数であ

ると表現すれば、式（5-17）は、

$$dM - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial p_i(t)}{\partial t} dt = 0$$

（5-18）

と書ける。価格はパラメータ t の函数と置かれることによって、価格と所得の函数であった需要函数 x_i は新たにパラメータ t と所得の函数と置くことができて、

$$p_i = p_i(t)$$
$$x_i = x_i(t, M)$$

（5-19）

と書ける。この需要函数 x_i が所謂 *Lipscitz* 条件[3]、

$$|F(x, y) - F(x, z)| \leq K|y - z|$$

（5-20）

即ち、この場合に $x = t, y = M^1,\ z = M^2$（但し、M^1、M^2はある取り得べき二つの所得水準）、$F(x, y) = \sum_i x_i(t, M^1)$、$F(x, z) = \sum_i x_i(t, M^2)$、$K$ は定数とすれば、

$$\left|\sum_i x_i(t, M^1) - \sum_i x_i(t, M^2)\right| \leq K|M^1 - M^2|$$

（5-21）

となって、この条件式（5-21）を満たすならば、微分方程式（5-18）は一つのそしてただ一つの解を持つところとなり、与えられた初期点 $X^0 = \{x_1^0, \cdots, x_n^0\}$ を通る n 次元の解曲面を持つ。このように、*Houthakker*（1950）は高位所得連鎖と低位所得連鎖の二つの所得線を導出し、極限に於いてこの二つが共通する一つの曲線に接近することを示し、二つの価格体系 P^0、P^1とその間の中間価格の各々に対する極限での解曲線がただ一つ存在することを示したのである。但し、*Houthakker*（1950）はこの解曲線について、この時点で言えることとして、出

[3] *Lipscitz* 条件を満たすことで導出される、*Caushy-Lipscitz* の定理の概要は次の通りである。函数 $F(x, y)$が閉区間、$|x - x_0| \leq A$、$|y - y_0| \leq B$（ここに、A、B、x_0、y_0は定数）で定められる有界閉領域に於いて連続であり、この有界閉領域内の任意の２点、(x, y_1)、(x, y_2)に対し、*Lipscitz* 条件 $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$を満たすような定数 K があるとき、函数 $F(x, y)$は *Lipscitz* 条件を満たすとされ、定数 K を *Lipscitz* 定数と呼ぶ。さらに、このような条件が満たされるとき、微分方程式 $dy/dx = F(x, y)$は、初期値(x_0, y_0)を通る解曲線 $y(x)$を持つが、この解曲線は閉区間の $|x - x_0| \leq \min(A, A/M)$（但し M は、x、y の範囲を定めた有界閉領域内に於ける $F(x, y)$の最大値を示す）で定義され、かつこの解曲線は一つそしてただ一つ存在する。

発点として取られた選択消費点 X^0 に対して X^1 は顕示的に選好されず、かつ X^1 に対して X^0 も顕示的に選好されることはないという表現を用いており、両者が無差別であるという表現はしていない。

⑵ *Houthakker*（1950）、*Samuelson*（1950）の顕示選好の強い公準

ここまでの議論は、２財の場合に適用される顕示選好の弱公準の範囲内で展開されてきた。即ち、２財に関する二次元平面上での無差別曲線は、一つの微分方程式で表されるが、その積分可能性が担保される限りに於いて効用函数の存在が保証される。このときに満たされなければならない積分可能性問題は、２変数問題の場合には自動的に保証され、従って議論の対象とはならない。しかし、３財以上の一般論になると積分可能性はよりシリアスに吟味されなければならなくなる。ここに至って、顕示選好の弱い公準は分析ツールとしての限界に突き当たるわけであり、より一般的な n 財の選好に対応した公準、所謂、顕示選好の強い公準の適用が必要不可欠となってくる。即ち、n 次元（$n \geq 3$）の財空間に於いて、無差別曲線ならぬ無差別超平面（*Indifferent hyper-plane*）の特定に際しては、この超平面上の全ての点が互いに対等（*equivalent*）の条件を満たし、再帰的（*reflexive*）で、対照的（*symmetry*）で、かつ推移的（*transitive*）であることを、*Houthakker*（1950）はその条件として特定されることを示した。

この公準を、*Samuelson*（1950）は顕示選好の強い公準（*Strong axiom of revealed preference*）と呼んだのに対して、*Houthakker*（1950）は準推移的な顕示選好の公準（*Semi-transitivity of revealed preference*）と呼んだ。*Samuelson*（1950）は顕示選好の強い公準を次のように明示している。

【顕示選好の強い公準（*SARP: Strong Axiom of Revealed Preference*）】
異なる選択消費パターン A、B、C、…、Z があるとき、もしも A の選好が B に対して顕示的により好ましく、また B の選好が C に対して顕示的により好ましいといったように、選好の連鎖ができるとき、連鎖の出発点である A の選好は連鎖の最後尾に位置する Z に対して顕示的により好ましいと定義し得る。もしくは、Z の選好が A に対して顕示的により好ましい選好となることはない、との表現での定義されている。即ち、

$$A \circledgt B \circledgt C \circledgt \cdots \circledgt Z \quad \Rightarrow \quad A \circledgt Z$$

(5-22)

或いは、

$$A \succ B \succ C \succ \cdots \succ Z \quad \Rightarrow \quad A \not\prec Z$$

(5-23)

上に示した顕示選好の強い公準は、弱公準に加えて n 財の選好に対する推移律を明示した公準であると言える。

(3) 無差別超平面と積分可能性問題

無差別曲線の導出に際しては、財の選択について観察可能な需要函数から観察不可能な効用函数の導出を介した考察が必要となる。この時、需要函数に係る全微分方程式が完全微分形となることが必要であること、そして当該全微分方程式の解としての効用函数 U について、$dU=0$ から $U=C$（C は定数）が導かれる。効用水準が定数であるということは、そのような解曲線（面）上の全ての選択消費点に於ける選択の効用が等しいということであり、即ち、当該解曲線（面）は無差別曲線（面）である。この時、需要函数に係る全微分方程式が完全微分形となるためには、$dU=0$ が積分可能であることが必要となる。これは、選好する財の種類が２種類であれば無条件に満たされる条件であるのに対して、財が３財以上となる場合、積分可能性条件は無条件に成立するものではなくなり、条件を明示する必要がある。

消費者が２財の選択行動に出ている場合は、*Samuelson*（1947）、*Little*（1949）、*Samuelson*（1948）の中で展開された、顕示選好の弱公準の世界での議論で十分であったが、３財以上について、即ち n 次元での財の選択消費に於ける無差別超平面の導出に係る考察では、n 次元の全微分方程式の積分可能性条件が吟味されなければならない。この問題は、*Houthakker*（1950）、*Samuelson*（1950）に於いて取り組まれている。

ここで、改めて２財の場合の無差別曲線について確認を行ってみよう。まず、消費者は x_1, x_2 の２財の選択に直面しているとする。このとき、需要函数は各々の財の価格 p_1, p_2 と所得 I の函数、即ち、

$$x_1 = x_1(p_1, p_2, I)$$
$$x_2 = x_2(p_1, p_2, I)$$

(5-24)

と書ける。需要函数はゼロ次同次であるので、２財の一方を価値尺度財（ニュメレール）として、例えば一般性を失うことなく第２財の価格を１として、p_1, I をそれぞれ p_2で徐すれば、式（5-24）の需要函数は財の価格 p_1, p_2の相対価格 p_1/p_2 と所得 $I = I/p_2$の函数と捉えることができる。また、需要函数（5-24）が逆需要函数を持つと仮定すれば、

$$p_1/p_2 = f(x_1, x_2)$$

(5-25)

(x_1, x_2)を最適消費点であるとみなせば、（２財の価格比）＝－（２財の限界代替率）が成立して、

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2} = -f(x_1, x_2)$$

(5-26)

という、２財 x_1, x_2についての微分方程式となる。式（5-26）を変形すれば、

$$f(x_1, x_2)\,dx_1 + dx_2 = 0$$

(5-27)

と書ける。これを一般形の表示に書き改めるべく、ある函数 ϕ_1、ϕ_2を導入して、式（5-27）を書き換えれば、

$$\phi_1 dx_1 + \phi_2 dx_2 = 0$$

(5-28)

という微分方程式で表現し直すことができる。ここで、ある函数 U を考え、U が式（5-28）について、$\partial U/\partial x_1 = \phi_1$、$\partial U/\partial x_2 = \phi_2$を満たすとき、式（5-28）は完全微分形であると称され、式（5-28）は、下に示すように U に関する全微分方程式となる。

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0$$

(5-29)

式（5-29）の解は $U = Const.$、即ち、無差別曲線である。式（5-29）の解は C を定数として、

$$U = \int\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)dx_1 + \int\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)dx_2 + C$$

(5-30)

という積分形を用いた形で与えられる。この式の解 $U=Const.$ が存在するためには、式（5-29）が積分可能でなければならないが、2財の選択消費の場合にあっては、函数 $\partial U/\partial x_1=\phi_1$、$\partial U/\partial x_2=\phi_2$ が連続微分可能であれば、式（5-30）の成立が保証される。また、式（5-29）がそのままの形では積分できない場合でも、積分因子の存在が言えることから、同様に積分可能性が保証される。一般に式(5-29）が積分可能となるための条件は、積分因子 $\mu(x_1, x_2)$ を乗じて

$$dU=\mu(x_1, x_2)(\phi_1 dx_1+\phi_2 dx_2)=0$$

$$\partial U/\partial x_1=\mu(x_1, x_2)\phi_1,\quad \partial U/\partial x_2=\mu(x_1, x_2)\phi_2$$

(5-31)

としたときに、2変数函数である U の x_1, x_2 各々の2階偏微分係数は、二階偏導函数の対称性の定理、即ち *young* の定理より

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}$$

(5-32)

が言えるが、これを式（5-31）に照らし合わせて、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}(\mu(x_1, x_2)\phi_2)=\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu(x_1, x_2)\phi_1)$$

$$\therefore \frac{\partial(\mu\phi_2)}{\partial x_1}=\frac{\partial(\mu\phi_1)}{\partial x_2}$$

(5-33)

となることが必要十分であり、2変数函数の場合は ϕ_1, ϕ_2 が連続微分可能であれば、この条件が無条件に満たされる[4]。では、明示しなければならない3財以上

[4] 式（5-33）が、積分可能条件であることを、証明する。まず、式（5-31）が完全微分形であるとする。次に、式（5-33）で $P(x_1, x_2)=\mu\phi_1$、$Q(x_1, x_2)=\mu\phi_2$ と置く。するとある函数 $U(x_1, x_2)$ について $P(x_1, x_2)=\partial U/\partial x_1$、$Q(x_1, x_2)=\partial U/\partial x_2$ と書けるから、

$$\partial P/\partial x_2=\partial^2 U/\partial x_2 \partial x_1=\partial^2 U/\partial x_1 \partial x_2=\partial Q/\partial x_1$$

となり式（5-33）が成り立つ。次にこの逆として式（5-33）を前提する、即ち $\partial P/\partial x_2=\partial Q/\partial x_1$ の前提の下で、式（5-31）が完全微分形となり函数 U が導出されることを導く。$P=\partial U/\partial x_1$ について両辺を閉区間［x_{10}, x_1］（但し x_{10} は適当な定数）で積分すると、

$$\int_{x_{10}}^{x_1}(\partial U(x_1, x_2)/\partial x_1)\,dx_1=\int_{x_{10}}^{x_1}P(x_1, x_2)\,dx_1$$

の場合の積分可能性条件は、どのように示されるのであろうか。

n 財の需要函数、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して、価格、$p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$（但し、$n$ 番目の財は価値尺度財と見なすことで、$p_n = 1$ と置ける）が対応するとき、２財の場合の式（5-25）と同様に、

$$p_i/p_n = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5-34}$$

なる函数 g_i を定義すれば、２財の場合の式（5-27）、（5-28）と同様に、

$$g_1dx_1 + g_2dx_2 + \cdots + g_{n-1}dx_{n-1} + dx_n = 0 \tag{5-35}$$

$$U(x_1, x_2) - U(x_{10}, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} P(x_1, x_2)\,dx_1$$
$$\therefore U(x_1, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} P(x_1, x_2)\,dx_1 + U(x_{10}, x_2)$$

式(1)

となる。次に、この函数 U は $Q(x_1, x_2) = \partial U/\partial x_2$ も満たすことから、

$$\partial U/\partial x_2 = \int_{x_{10}}^{x_1} (\partial P(x_1, x_2)/\partial x_2)\,dx_1 + \partial U(x_{10}, x_2)/\partial x_2 = Q(x_1, x_2)$$

が成り立つ。ここで、前提条件の $\partial P/\partial x_2 = \partial Q/\partial x_1$ を用いると、前の式は、

$$\partial U/\partial x_2 = \int_{x_{10}}^{x_1} (\partial Q(x_1, x_2)/\partial x_1)\,dx_1 + \partial U(x_{10}, x_2)/\partial x_2 = Q(x_1, x_2)$$

と書ける。この式を展開して、

$$Q(x_1, x_2) - Q(x_{10}, x_2) + \partial U(x_{10}, x_2)/\partial x_2 = Q(x_1, x_2)$$
$$\therefore Q(x_{10}, x_2) = \partial U(x_{10}, x_2)/\partial x_2$$

上の式の両辺を閉区間［x_{20}, x_2］（但し、x_{20} は適当な定数）で積分すると、

$$\int_{x_{20}}^{x_2} (\partial U(x_{10}, x_2)/\partial x_2)\,dx_2 = \int_{x_{20}}^{x_2} Q(x_{10}, x_2)\,dx_2$$
$$U(x_{10}, x_2) - U(x_{10}, x_{20}) = \int_{x_{20}}^{x_2} Q(x_{10}, x_2)\,dx_2$$
$$\therefore U(x_{10}, x_2) = \int_{x_{20}}^{x_2} Q(x_{10}, x_2)\,dx_2 + U(x_{10}, x_{20})$$

が与えられる。これを式(1)に代入して、

$$U(x_1, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} P(x_1, x_2)\,dx_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} Q(x_{10}, x_2)\,dx_2 + U(x_{10}, x_{20})$$
$$U(x_1, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} \mu\phi_1 dx_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} \mu\phi_2 dx_2 + U(x_{10}, x_{20})$$
$$\therefore U(x_1, x_2) = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial \mu U(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} \frac{\partial \mu U(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 + U(x_{10}, x_{20})$$

式(2)

となって、求める函数 U を得る。実際、式(2)を U について全微分すれば、

$$dU(x_1, x_2) = \frac{\partial(\mu U(x_1, x_2))}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(\mu U(x_1, x_2))}{\partial x_2} dx_2$$

となって、式（5-31）を得る。

式（5-35）についても2財の場合の式（5-28）と同様に、一般化のための函数φ_1, $\varphi_2, \cdots, \varphi_n$を導入して、式（5-35）と同値な微分方程式を次のように書き換えると、

$$\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \cdots + \varphi_n dx_n = 0$$

（5-36）

また、ここでも積分因子$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$を式（5-36）に乗ずれば、

$$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \cdots + \varphi_n dx_n) = 0$$

（5-37）

このとき2財の場合同様に、ある函数Uが存在して、

$$dU = \mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)(\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \cdots + \varphi_n dx_n) = 0$$
$$\partial U / \partial x_1 = \mu(x_1, x_2)\varphi_1, \cdots, \partial U / \partial x_n = \mu(x_1, x_2)\varphi_n$$

（5-38）

を満たすとき、全微分方程式（5-37）は完全微分形であると称され、その解は$U = Const.$を満たす無差別超平面となる。しかし、3変数以上の場合の全微分方程式についての積分因子$\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n)$の存在は無条件には保証されない。積分因子が存在して全微分方程式(5-37)が完全微分形となるためには、まず式(5-38)に即して下記の連立偏微分方程式を考える必要がある。即ち、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_i}$$

（但し、$i \neq j \neq k,\ \ i,j,k = 1, \cdots, n$）

（5-39）

式（5-38)、(5-39）に対して式変形を施して整理すれば、

$$\varphi_i \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right) + \varphi_j \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right) + \varphi_k \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) = 0$$

（但し、$i \neq j \neq k,\ \ i,j,k = 1, \cdots, n$）

（5-40）

を得る。さらに、$\varphi_n = 1, i = 1, 2, \cdots, n-1, k = n$として式（5-40）を計算すると、

$$\varphi_i\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}\right)+\varphi_j\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_i}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n}\right)+\varphi_n\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right)=0$$

$$\therefore\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}-\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}-\varphi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n} \tag{5-41}$$

を得るが、これが「アントネッリの対称性」と称される、積分可能であるための条件式を与える[5)]。このような積分可能性条件が充足されて初めて、３財以上の選択消費の場合で無差別超平面の存在が保証される。

６．結び

Samuelson（1947）は、効用函数の存在を前提することなく、観察可能な需要函数から出発して顕示選好の弱公準を打ち立て、この弱公準に基づいて需要函数のゼロ次同次性、価格と消費の需要法則、スルツキー代替行列の半負値定符号性といった、消費者行動理論に於ける消費者選好の分野の重要な法則や特質を導くことに成功した。加えて、*Samuelson*（1947）、*Little*（1949）、*Samuelson*（1948）は、同じく顕示選好の弱公準を応用することによって、序数的効用函数、即ち無差別曲線の導出にも成功したが、ただこの場合は積分可能性条件が無条件に成立する２財の選択消費の場合に限定されていた。一般的な n 財の選択消費の場合を包摂する際の、無差別超平面の導出が保証されるのは n 財の場合での需要函数に係る全微分方程式が積分可能となる条件が満たされる場合であり、*Houthakker*（1950）、*Samuelson*（1950）に於いてこの問題が取り組まれ、その結果、顕示選好の強い公準が導出された。顕示選好の強い公準は弱い公準に加えて n 財の選択消費の際の推移律を包摂した一般的公準となることで n 財の無差別超平面の存在が保証された。

消費者選好理論発展の系譜の中で、効用の可測性即ち基数的効用函数の概念をなんら前提とせず、観測可能な消費者の選択消費行動、即ち需要函数から出発して複数財の選択消費の組み合わせに対する消費者の選好序列に依拠した序数的効用函数、即ち n 財の選択消費の際の無差別超平面の導出に係る一連の研究は、

---

5) 櫻田（2021），p. 84

経験科学としての消費者行動理論を大きく前進させてきたと言える。今後とも、この分野のさらなる彫琢と進展の状況を注視していきたい。

参考文献

⑴Samuelson, Paul Anthony, “Foundations of Economic Analysis”, Harvard University Press, 1947（佐藤隆三訳、『経済分析の基礎』、勁草書房、1967）

⑵――――, “A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior”, Economica, New series, Vol.5, No.17, pp.61-71, 1938

⑶――――, “A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior: An Addendum”, Economica, New series, Vol.5, No.19, pp.353-354, 1938

⑷――――, “Consumption Theory in Terms of Revealed Preference”, Economica, New series, Vol.15, No.60, pp.243-253, 1948

⑸――――, “The Problem of Integrability in Utility Theory”, Economica, New series, Vol.17, No.68, pp.355-385, 1950

⑹Little, Ian Malcolm David, “A Reformation of the Theory of Consumer's Behavior”, Oxford Economic Papers, 1949

⑺Houthakker, Hendrik Samuel, “Revealed Preference and Utility Function”, Economica, New Series, Vol.17, No.66, pp.159-174, 1950

⑻櫻田陽一、「ワルラス経済学とその周辺」、福岡女学院大学紀要 Vol. 7、2021年